HANDBUCH DER EXPERIMENTALPHYSIK

UNTER MITWIRKUNG VON

G. ANGENHEISTER-Göttingen, E. [illegible] ANGERER-München, E. BACK-Tübingen, G. BAKKER-den Haag, A. BECKER-Heidelberg, H. BENNDORF-Graz, P. CERMAK-Gießen, C. CR[illegible] [illegible]-Innsbruck, [illegible] UCKEN-Breslau, W. [illegible] CAEDE-K[illegible] [illegible]-Tübingen, P. GOERENS-Essen, A. HAAS-Wien, F. HARMS-W[illegible], K. HERZFELD-München, A. HESSEN-Wilhelmshaven, G. HOFFMANN-Königsberg [illegible] HOLBORN [illegible]-burg, G. JAFFÉ-Leipzig, G. JOOS-Jena, [illegible] KONIG-[illegible], O. KNOBLAUCH [illegible], F. KOHLRAUSCH-Graz, F. KOSSMAT-Leipzig, F. KR[illegible] [illegible] LAUE-Berlin, P. LENARD-Heidelberg, A. [illegible]OSCH[illegible]-München, W. MEINARDUS-Göttingen, G. MIE-F[illegible], C. MÜLLER-Charlottenburg, P. NIGGLI-Zürich, L. [illegible]-Göttingen, C. PULFRICH-Jena, F. [illegible] L. SCHILLER-Leip[illegible] SCH[illegible]-Lichterfelde, W. SCHUMANN-München, E. SCHWEIDLER-In[illegible], [illegible]-Greifswald, M. SIEGBAHN-Upsala, J. STARK-Ullersricht, D. THOMA-München, R. TOMASCHEK-Heidelberg, L. VEGARD-Oslo, E. WARBURG-Charlottenburg, E. WIECHERT-Göttingen, W. WIEN-München

HERAUSGEGEBEN

VON

W. WIEN UND F. HARMS

MÜNCHEN WÜRZBURG

BAND 2

1926

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.

LEIPZIG

MECHANIK
DER MASSENPUNKTE UND DER STARREN KÖRPER

VON

DR. PHIL. ARTHUR HAAS
A. O PROFESSOR DER UNIVERSITÄT WIEN

MIT 236 ABBILDUNGEN

1926
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.
LEIPZIG

Vorwort.

Die in diesem Bande behandelte Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper stellt einen physikalischen Wissenszweig dar, in dem einerseits weit weniger als in anderen noch wesentliche neue Fortschritte erzielt werden und in dem andererseits auch das Experiment eine weit geringere Rolle spielt als in anderen Teilen der Physik.

Es ist begreiflich, daß gerade diese beiden Umstände bei der Bearbeitung des vorliegenden Bandes große Schwierigkeiten verursachten. Mit Rücksicht darauf, daß der Band innerhalb eines Handbuchs der Experimentalphysik erscheint, glaubte ich am besten zu tun, wenn ich in den ersten zwei Teilen des Bandes von der mechanischen Theorie nur die wichtigsten Ergebnisse und auch diese nur insoweit, als sie für die Experimentalphysik von Wichtigkeit sind, darstellte, die empirischen Grundlagen der Theorie und den Vergleich ihrer Resultate mit der Erfahrung diskutierte und im übrigen am eingehendsten solche mechanische Probleme behandelte, die für die messende Physik von Wichtigkeit sind. In einem dritten Teil wurden die erforderlichen mathematischen Ergänzungen zu den ersten zwei Teilen des Bandes vereinigt. Die abgesonderte Behandlung erfolgte, um einen mathematisch weniger geschulten Leser der ersten zwei Teile nicht zu häufigen Unterbrechungen seiner Lektüre zu zwingen.

Zum Schlusse sei es mir noch gestattet, dem Verlage aufrichtig für sein stets bewiesenes bereitwilliges Entgegenkommen zu danken.

Wien, im Februar 1926.

Arthur Haas.

Inhaltsverzeichnis.

ERSTER TEIL.

Die Bewegung des Massenpunktes.

Erstes Kapitel.

Die Grundbegriffe der Kinematik.

Zweites Kapitel

Die fundamentalen Erfahrungstatsachen der Mechanik.

Drittes Kapitel.

Die allgemeinen Prinzipe der Dynamik.

Viertes Kapitel.

Die Fallbewegung.

Fünftes Kapitel.

Die Pendelbewegung.

Sechstes Kapitel.

Die Wurfbewegung.

Siebentes Kapitel

Die Zentrifugalkraft.

Achtes Kapitel.

Die Bewegungsvorgänge auf der rotierenden Erde.

Neuntes Kapitel.

Die Gravitation.

Zehntes Kapitel.

Die irdische Schwerkraft.

Elftes Kapitel.

Die Bewegung von Massensystemen.

Zwölftes Kapitel.

Die Himmelsmechanik.

ZWEITER TEIL.

Die Mechanik des starren Körpers.

Dreizehntes Kapitel.

Die Zusammensetzung der Kräfte.

Seite

Vierzehntes Kapitel

Die Maschinen.

Fünfzehntes Kapitel

Die Rotation starrer Körper.

Sechzehntes Kapitel.

Das physische Pendel.

Siebzehntes Kapitel.

Die Kreiselbewegung.

Achtzehntes Kapitel.

Die Reibung fester Körper.

DRITTER TEIL.

Mathematische Ergänzungen zur Mechanik fester Körper.

Neunzehntes Kapitel.

Die Grundgleichungen der Mechanik des Massenpunktes.

Zwanzigstes Kapitel

Spezielle Probleme der Punktmechanik.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Die mechanischen Grundgleichungen der Massenpunktsysteme.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Die Grundgleichungen der Mechanik starrer Körper.

Dreiundzwanzigstes Kapitel

Spezielle Probleme der Mechanik starrer Körper.

Erster Teil.

Die Bewegung des Massenpunktes.

Erstes Kapitel.

Die Grundbegriffe der Kinematik.

§ 1. Der Massenpunkt.

Die Mechanik ist die Lehre von den Bewegungserscheinungen im Zusammenhang mit den Bewegungsursachen. Der spezielle Wissenszweig, der die Bewegungsphänomene ohne Rücksicht auf ihre Ursachen behandelt, wird als Kinematik bezeichnet (nach dem griechischen Worte „Kinesis", das Bewegung bedeutet). Die Kinematik muß sich daher unabhängig von allen physikalischen Erfahrungstatsachen durch logische Begriffsentwicklung und rein mathematische Deduktionen aufbauen lassen.

Bewegung bedeutet Ortsveränderung; die Gesamtheit der aneinander gereihten Orte, die ein bewegter Körper nacheinander einnimmt, stellt die von dem bewegten Körper beschriebene Bahn dar. Je nachdem, ob diese gerade oder krumm ist, wird zwischen geradliniger und krummliniger Bewegung unterschieden.

Das einfachste denkbare Bewegungsobjekt wird durch einen Körper dargestellt, dessen gesamte Materie in einem einzigen Punkte konzentriert gedacht wird. Man bezeichnet einen solchen fingierten Körper als materiellen Punkt oder Massenpunkt. Eine Bewegung, für deren Betrachtung die tatsächliche räumliche Ausdehnung und Gestalt des bewegten Körpers außer Betracht bleiben kann, läßt sich immer auf die Bewegung eines Massenpunktes zurückführen.

§ 2. Die geradlinige Bewegung und der Begriff der Geschwindigkeit.

Eine geradlinige Bewegung wird als gleichförmig bezeichnet, wenn in gleichen Zeiten gleiche Wegstücke zurückgelegt werden. Der Quotient aus einem beliebigen Stücke des Weges und der zu der Zurücklegung dieses Wegstückes erforderlichen Zeit wird dann

als die **Geschwindigkeit** der Bewegung bezeichnet. Bei einer gleichförmigen Bewegung behält also die Geschwindigkeit während der Bewegung ihren Wert unverändert bei, und dieser ergibt sich stets in derselben Größe, wie groß auch immer das Wegstück gewählt wird. Wird die Geschwindigkeit mit v bezeichnet, das Wegstück mit Δs und die zu dessen Zurücklegung notwendige Zeit mit Δt, so gilt bei einer gleichförmigen Bewegung, unabhängig von der Größe von Δt, die Beziehung

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{1}$$

Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung wird somit als der **Geschwindigkeitseinheit** gleich angesehen, wenn in einer Zeiteinheit eine Wegstrecke von der Größe der Längeneinheit zurückgelegt wird. Da in der Physik als Längeneinheit das **Zentimeter** und als Zeiteinheit die **Sekunde** benutzt werden, und die Geschwindigkeit der Quotient aus Weg und Zeit ist, so ist die Geschwindigkeitseinheit durch das Symbol 1 cm/sec oder 1 cm $\sec^{-1}$ dargestellt. Ein bestimmter Name ist für diese Einheit nicht gebräuchlich; das gelegentlich vorgeschlagene Wort „cel" (nach dem lateinischen, „Geschwindigkeit" bedeutenden Worte „celeritas") hat sich nicht einzubürgern vermocht.

Bei einer **ungleichförmigen** geradlinigen Bewegung kann natürlich nicht von einer Geschwindigkeit schlechthin die Rede sein, sondern nur von einem **momentanen Werte der Geschwindigkeit**. Der quantitative Ausdruck für die Momentangeschwindigkeit ergibt sich, indem in Gedanken die kompliziertere ungleichförmige Bewegung auf die einfachere gleichförmige zurückgeführt wird; denn für eine Zeit, die zu klein ist, als daß sich in ihr die Geschwindigkeit **merklich** ändern würde, kann natürlich die tatsächlich ungleichförmige Bewegung durch eine **fingierte gleichförmige** ersetzt werden. Der durch Gl. 1 dargestellte Ausdruck gilt somit **näherungsweise** auch für eine ungleichförmige Bewegung, und zwar gilt er mit um so größerer Genauigkeit, je **kleiner** das Zeitintervall Δt gewählt wird, das der Berechnung der Geschwindigkeit zugrunde gelegt wird. In der Sprache der Mathematik drückt man dies so aus, daß man als richtigen Wert der Momentangeschwindigkeit den **Grenzwert** (oder Limes) bezeichnet, den der Differenzenquotient $\Delta s/\Delta t$ mit immer kleiner werdendem Δt erreicht; oder in der üblichen Gestalt einer mathematischen Formel

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{2}$$

§ 3. Die Beschleunigung.

Ein besonders einfacher Fall einer ungleichförmigen Bewegung liegt dann vor, wenn sich die von einem bestimmten Augenblick an zurückgelegten Wege so verhalten wie die Quadrate der Zeiten, die seit jenem Augenblicke verflossen sind. Bezeichnen wir den Proportionalitätsfaktor zwischen Weg und Zeit mit a, so ist also in diesem Spezialfall

$$s = at^2. \tag{3}$$

Wir wollen nun etwa das Zeitelement betrachten, bei dessen Beginn t_1 und bei dessen Ende $t_1 + \Delta t$ Sekunden seit dem als Nullpunkt der Zeitmessung gewählten Augenblicke verflossen sind. Bei Beginn des Zeitintervalls sei der Weg s_1 zurückgelegt, am Ende des Zeitintervalls der Weg $s_1 + \Delta s$. Dann ist also

$$s_1 = at_1^2 \quad \text{und} \quad (s_1 + \Delta s) = a(t_1 + \Delta t)^2.$$

Durch Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung folgt somit $\Delta s = 2at_1\,\Delta t + a(\Delta t)^2$. Für immer kleiner werdendes Δt wird somit in der Grenze, weil neben sehr kleinen Größen jedesfalls deren Quadrat vernachlässigt werden kann,

$$\frac{ds}{dt} = 2at_1; \tag{4}$$

in dem betrachteten Spezialfall ist also die Momentangeschwindigkeit der Zeit proportional. Nach Ablauf von zwei Sekunden ist die Momentangeschwindigkeit doppelt so groß wie nach Ablauf von einer Sekunde, nach drei Sekunden dreimal so groß, und so fort. In der Sekunde nimmt die Geschwindigkeit um 2 a zu.

In dem Falle einer gleichmäßigen Geschwindigkeitszunahme wird nun die in der Zeiteinheit erfolgende Vermehrung als die Beschleunigung bezeichnet. In dem vorhin betrachteten Sonderfall ist sie gleich 2 a, und es gilt, wenn wir in üblicher Weise die Beschleunigung mit b bezeichnen, (in Analogie zu Gl. 1) die Beziehung

$$b = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{5}$$

Wenn die Beschleunigung konstant ist, so wird die geradlinige Bewegung als gleichförmig beschleunigt bezeichnet. Sonst kann nur von einer momentanen Beschleunigung gesprochen werden. Sie ist durch den Grenzwert bestimmt, dem sich der Differenzenquotient $\Delta v/\Delta t$ für immer kleiner werdendes Δt nähert. Es ist also bei einer geradlinigen Bewegung im allgemeinen (in Analogie zu Gl. 2)

$$b = \frac{dv}{dt}, \tag{6}$$

oder, wie man in der Sprache der Mathematik sagt, die Beschleunigung ist der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit. Ist die Beschleunigung negativ, so wird sie als Verzögerung bezeichnet und dementsprechend von einer verzögerten Bewegung gesprochen.

Als Einheit der Beschleunigung gilt diejenige, bei der die auf die Zeiteinheit bezogene Geschwindigkeitsvermehrung der Geschwindigkeitseinheit gleich ist. Diese Beschleunigungseinheit ist nach Gl. 5 gleich dem Quotienten aus 1 cm/sec und 1 sec, also gleich 1 cm sec^{-2}. Auch für diese Einheit ist kein bestimmter Name üblich (wenn auch gelegentlich dafür die Bezeichnung „gal" vorgeschlagen wurde, zu Ehren Galileis, von dem der Begriff der Beschleunigung herrührt).

Ist bei einer gleichförmigen Bewegung die Beschleunigung in ihrer Abhängigkeit von der Zeit gegeben, also, wie man zu sagen pflegt, als Funktion der Zeit, so ist es nur eine Aufgabe der sogenannten Integralrechnung, auch die Geschwindigkeit und den Weg als Funktionen der Zeit zu ermitteln.

Drei besonders einfache und naheliegende Spezialfälle ergeben sich, je nachdem, ob die Beschleunigung von der Zeit unabhängig, also konstant, oder aber der Zeit proportional oder endlich dem Wege proportional ist. Im ersten Falle werden die Geschwindigkeit eine lineare und der zurückgelegte Weg eine quadratische Funktion der Zeit. Ist

$$b = \text{konstant}, \tag{7}$$

so findet man durch Integration

$$v = bt + v_0 \tag{8}$$

und

$$s = b\frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0, \tag{9}$$

wenn v_0 die Geschwindigkeit in dem als Nullpunkt der Zeitmessung gewählten Augenblick und s_0 der in diesem Augenblick bereits zurückgelegte Weg ist. Wählt man den Nullpunkt der Zeitmessung so, daß für ihn der Körper in Ruhe ist, und rechnet man den Weg von dieser Ruhelage, so verschwinden die Konstanten v_0 und s_0, und es wird dann einfach

$$v = bt, \quad s = \tfrac{1}{2}bt^2. \tag{10}$$

Durch Anwendung der elementaren Regeln der sogenannten Differentialrechnung überzeugt man sich andererseits leicht davon, daß sowohl aus den Gl. 8 und 9 als auch aus Gl. 10 durch Differentiation die Gl. 7 folgt.

Wenn, was wir als weiteren Spezialfall angenommen haben, die **Beschleunigung der Zeit proportional** ist, wenn also

$$b = ft \tag{11}$$

ist, wobei f einen konstanten Proportionalitätsfaktor bedeute, so findet man durch Integration

$$v = f\frac{t^2}{2} + v_0 \tag{12}$$

und

$$s = f\frac{t^3}{6} + v_0 t + s_0 . \tag{13}$$

Es ist dann die Geschwindigkeit eine quadratische und der Weg eine kubische Funktion der Zeit.

§ 4. Die schwingende Bewegung.

In dem dritten, vorhin erwähnten Sonderfall wollen wir in der Spezialisierung noch weiter gehen und annehmen, daß die Beschleunigung dem Wege entgegengesetzt sei; d. h. sie sei zu der Stelle hin gerichtet, von der aus die den Weg darstellende Entfernung gemessen werde. Es ist also zu setzen

$$b = -hs, \tag{14}$$

wobei h einen positiven Proportionalitatsfaktor bedeutet. Da die Beschleunigung der zeitliche Differentialquotient der Geschwindigkeit und diese wieder der zeitliche Differentialquotient des Weges ist, so muß in diesem Falle s eine Funktion der Zeit sein, die ihrem eigenen zweiten Differentialquotienten mit entgegengesetztem Vorzeichen proportional ist.

Nun hat sowohl die **Sinus**- als auch die **Kosinusfunktion** die Eigentümlichkeit, daß sie ihrem zweiten Differentialquotienten entgegengesetzt gleich ist. Nach den bekannten Formeln für Sinus und Kosinus einer Winkelsumme ist nämlich

$$\sin(x + \Delta x) = \sin x \cos(\Delta x) + \cos x \sin(\Delta x) \tag{15}$$

und

$$\cos(x + \Delta x) = \cos x \cos(\Delta x) - \sin x \sin(\Delta x) . \tag{16}$$

Den Winkel x wollen wir dabei, wie es in der sogenannten „höheren“ Mathematik üblich ist, im „**Bogenmaß**“ messen, in dem ein Winkel von 180° gleich π gesetzt wird, einer von 90° gleich $\pi/2$, einer von 45° gleich $\pi/4$ und daher einem Winkel von $\varphi°$ die Maßzahl $\varphi \times 0{,}017\,453\ldots$ zukommt (letztere Zahl ergibt sich, indem π durch 180 dividiert wird). In einem Kreis, dessen Radius der Längeneinheit gleich ist, ist also die Bogenlänge dem im Bogenmaß ausgedrückten Winkel gleich, und hieraus folgt, daß für sehr kleine

Winkel der Unterschied zwischen der durch die Sehne dargestellten Größe sin y und y selbst unmerklich wird, wofern wir uns eben des Bogenmaßes bedienen.

Wenn wir daher Δx immer kleiner werden lassen, so wird mit immer besserer Annäherung einerseits sin (Δx) gleich Δx und andererseits cos (Δx) gleich Eins. Es wird dann mit immer größerer Annäherung

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = \cos x \cdot \Delta x \tag{17}$$

und

$$\cos(x + \Delta x) - \cos x = -\sin x \cdot \Delta x. \tag{18}$$

Der Differentialquotient von sin x nach x ist aber durch den Grenzwert gegeben, dem sich die durch Δx dividierte Differenz $\sin(x + \Delta x) - \sin x$ mit immer kleiner werdendem Δx immer mehr nähert, und Analoges gilt für den Differentialquotienten von cos x nach x. Es wird somit

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \tag{19}$$

und

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x. \tag{20}$$

Für die zweiten Differentialquotienten, für die wir die üblichen Symbole anwenden, gelten somit die Beziehungen

$$\frac{d^2(\sin x)}{dx^2} = -\sin x \tag{21}$$

und

$$\frac{d^2(\cos x)}{dx^2} = -\cos x. \tag{22}$$

Aus elementaren Formeln der Differentialrechnung folgt, daß nicht nur die Funktionen sin x und cos x im zweiten Differentialquotienten sich selbst entgegengesetzt gleich sind, sondern daß diese Eigentümlichkeit auch den Funktionen $A \sin(x + \varepsilon)$ oder $A \cos(x + \varepsilon)$ zukommt, wobei A und ε beliebige Konstanten sind. Wenn statt entgegengesetzter Gleichheit bloß entgegengesetzte **Proportionalität** verlangt wird, so genügt auch die Funktion $A \sin(a x + \varepsilon)$ oder die entsprechende Kosinusfunktion der gestellten Forderung, wobei a der Quadratwurzel aus dem Proportionalitätsfaktor h der Gl. 14 entspricht. Falls die Beschleunigung der veränderlichen Entfernung s proportional ist, die der bewegte Körper von der Stelle $s = 0$ hat, und wenn sie zu dieser Stelle gerichtet ist, gilt also allgemein die Beziehung

$$s = A \sin(at + \varepsilon). \tag{23}$$

Wählt man als Nullpunkt der Zeitmessung einen Augenblick, für den s verschwindet, so verschwindet auch die Konstante ε. Da im übrigen cos x gleich sin $(x + \pi/2)$ ist, so kann in Gl. 23 natürlich auch cos statt sin geschrieben werden, wofern die Konstante ε dann um $\pi/2$ kleiner gewählt wird.

Beseitigen wir durch geeignete Wahl des Nullpunktes der Zeitmessung die Konstante ε, ist also einfach

$$s = A \sin(a t), \tag{24}$$

so wird:

für $t = 0$ $s = 0$	für $t = \frac{\pi}{2a}$ $s = +A$	für $t = \frac{\pi}{a}$ $s = 0$
für $t = \frac{3\pi}{2a}$ $s = -A$	für $t = \frac{2\pi}{a}$ $s = 0$	für $t = \frac{5\pi}{2a}$ $s = +A$ usw.

Da der Sinus eines Winkels nicht größer als Eins sein kann, so kann der absolute Betrag der Entfernung s nicht größer als die Konstante A werden Die Bewegung verläuft in der Geraden zwischen den beiden Punkten, die von der Ruhelage $s = 0$ nach beiden Seiten um die Entfernung A abstehen. Da der Sinus von $(x + 2n\pi)$ für ganzzahlige Werte von n immer gleich sin x ist, so wird jeder Punkt der Bahn in derselben Richtung in Intervallen von der Größe

$$\tau = \frac{2\pi}{a} \tag{25}$$

durchlaufen.

Eine derartige Bewegung wird als eine schwingende Bewegung oder Oszillation bezeichnet. Die Konstante A wird die Amplitude oder Schwingungsweite genannt, die Entfernung von der Ruhelage die Elongation oder der Ausschlag. Die Größe τ heißt die Periode der Schwingung oder die Schwingungsdauer*). Der reziproke Wert der Periode wird als die Frequenz oder Schwingungszahl bezeichnet. Die Größe ε wird die Phasenkonstante genannt. Sie kann wohl immer in den Formeln beseitigt werden, wenn nur eine einzelne Schwingung für sich betrachtet wird; sie tritt im allgemeinen aber notwendigerweise in den Formeln auf, wenn es sich um mehrere gleichzeitige Schwingungen handelt, wo der Nullpunkt der Zeitmessung nur einer einzelnen Schwingung angepaßt werden kann.

*) Häufig wird jedoch auch die Hälfte dieser Größe so genannt.

Für die Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung folgt aus Gl. 23 nach elementaren Formeln der Differentialrechnung

$$v = a A \cos(a t + \varepsilon) = a A \sin(a t + \varepsilon + \pi/2). \qquad (26)$$

Die Geschwindigkeit ist ebenfalls eine periodische Funktion der Zeit, aber sie weist eine Phasendifferenz von einer Viertelperiode gegenüber der schwingenden Bewegung selbst auf. Sie ist am größten, wenn der schwingende Massenpunkt die Ruhelage passiert, und sie verschwindet, wenn die Elongation der Amplitude gleich wird, der schwingende Körper also seine Bewegungsrichtung wechselt. Daß auch die Beschleunigung eine periodische Funktion der Zeit ist, folgt ohne weiteres aus Gl. 14. Sie weist gegenüber der Geschwindigkeit wiederum eine Phasendifferenz von einer Viertelperiode und somit gegenüber der Bewegung eine von einer halben Periode auf.

§ 5. Die krummlinige Bewegung.

Bei einer krummlinigen Bewegung kann nicht wie bei der bisher betrachteten geradlinigen Bewegung von einer gleichbleibenden, sondern nur von einer momentanen Bewegungsrichtung gesprochen werden. Diese ist für eine beliebige Stelle der Bahn durch die Richtung bestimmt, der sich die Verbindungslinie zwischen der betreffenden Stelle und einer ihr benachbarten um so mehr nähert, je näher die benachbarte Stelle gewählt wird. Die momentane Bewegungsrichtung ist also bei einer krummlinigen Bewegung durch die jeweilige Richtung der Bahntangente gegeben.

Bei einer krummlinigen Bewegung kann die Bahn wieder eine ebene Kurve sein oder eine räumliche, je nachdem ob alle Punkte der betrachteten Bahn in derselben Ebene liegen oder nicht. Aber auch im letzteren Falle läßt sich für jeden Punkt der Bahn eine Ebene festlegen, an deren Richtung sich eine durch den betreffenden Punkt und zwei benachbarte Bahnpunkte gelegte Ebene um so genauer anlegt, je näher die drei Punkte zueinander liegen. Diese Ebene wird als die Schmiegungsebene (oder Oskulationsebene) bezeichnet. Die Richtung, die in der Schmiegungsebene auf der Bahntangente senkrecht steht, heißt die Bahnnormale. Um die einzelnen, auf der Bahnnormalen liegenden Punkte kann man (und zwar auf der Konvexseite der Bahn) je einen Kreis konstruieren, der die Bahnkurve an der betrachteten Stelle berührt. Unter allen diesen Kreisen gibt es einen, der sich enger als alle anderen an die Bahnkurve an der betrachteten Stelle anschmiegt. Dieser Kreis wird der Krümmungskreis und sein Radius der Krümmungshalbmesser für die betreffende Stelle genannt.

§ 6. Die Geschwindigkeit als Vektorgröße.

Da auch bei einer krummlinigen Bewegung ein genügend kleines Stück der Bewegung immer näherungsweise als gerade angesehen werden kann, so gilt die früher für die Momentangeschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung abgeleitete Gl. 2 auch für eiue krummlinige Bewegung.

Den augenblicklichen Bewegungszustand kann man sich nun am einfachsten dargestellt denken durch eine gerichtete Strecke, die die Richtung der Bahntangente, den Richtungssinn der Bewegung und eine Länge von sovielen Längeneinheiten hat. als die momentane Zahl der Geschwindigkeitseinheiten beträgt. Man bezeichnet allgemein physikalische Größen. die durch gerichtete Strecken darstellbar sind, als Vektorgrößen oder Vektoren schlechthin. An jedem Vektor sind drei wesentliche Eigenschaften zu unterscheiden: die Richtung, der Richtungssinn und der durch die Länge der Strecke dargestellte Betrag. Zu den Vektorgrößen gehort also auch die Geschwindigkeit.

§ 7. Zerlegung und Zusammensetzung von Vektoren.

Die Projektion eines Vektors auf eine bestimmte Richtung wird als die Komponente des Vektors nach dieser Richtung bezeichnet. Nach einer elementaren geometrischen Beziehung ist die Projektion gleich dem Betrage des Vektors, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels, den die Richtung des Vektors mit derjenigen Richtung einschließt, nach der die Komponente genommen wird. Aus dem pythagoreischen Lehrsatz folgt ohne weiteres, daß bei einer Zerlegung eines Vektors nach zwei zueinander senkrechten Richtungen, die mit dem Vektor in derselben Ebene liegen, das Quadrat des Vektorbetrages gleich ist der Summe der Quadrate der Komponenten. Wird statt einer solchen „ebenen“ allgemeiner eine „räumliche“ Zerlegung des Vektors nach drei zueinander senkrechten Achsen vorgenommen, so folgt ebenfalls aus dem pythagoreischen Lehrsatz, daß dann das Quadrat des Vektorbetrages der Summe der Quadrate der drei Komponenten gleich ist. Dies gilt insbesondere auch für die Komponenten eines Vektors in bezug auf ein Koordinatensystem.

Die Zusammensetzung oder „Addition“ von Vektoren wird definitionsgemäß derart vorgenommen, daß man von dem Endpunkte des ersten Vektors den zweiten aufträgt und zu dem Endpunkt des zweiten nun eine gerichtete Strecke von dem Anfangspunkt des ersten zieht (Fig. 1).

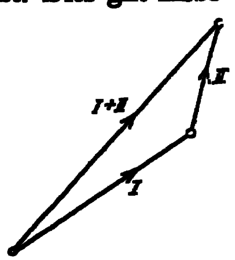


Fig. 1.

Umgekehrt erhält man die vektorielle Differenz zweier Vektoren, indem man einen Vektor sucht, der zu dem Subtrahenden vektoriell hinzugefügt, den Diminuenden ergibt.

Betrachten wir eine mit der Zeit veränderliche Vektorgroße, so können wir daher den vektoriellen Unterschied der Werte bestimmen, die dieser veränderliche Vektor am Ende und am Beginn eines Zeitintervalles hat. Der Grenzwert, dem sich dieser vektorielle Unterschied, dividiert durch das Zeitintervall, mit immer kleiner werdendem Zeitintervall nahert, wird als der zeitliche Differentialquotient der Vektorgröße bezeichnet.

§ 8. Tangential- und Normalbeschleunigung.

Der Vektor, der den zeitlichen Differentialquotienten des Geschwindigkeitsvektors darstellt, wird als der Beschleunigungsvektor definiert. Es ist ohne weiteres klar, daß diese allgemeinere Definition als Spezialfall die früher für die geradlinige Bewegung gegebene Definition mit einschließt.

Bei einer ebenen Bewegung muß der Beschleunigungsvektor jedesfalls in der Bahnebene liegen, sonst, im allgemeineren Fall, in der Schmiegungsebene. Denn sind A, B und C drei benachbarte Punkte der Bahnkurve, so hat für den Punkt A der Geschwindigkeitsvektor die Richtung des Bahnelementes AB und für den Punkt B die Richtung des Bahnelementes BC. Beide Geschwindigkeitsvektoren liegen also in der durch die Punkte A, B und C festgelegten Ebene, und dasselbe muß natürlich auch von dem Vektor gelten, der ihren vektoriellen Unterschied darstellt.

In der Ebene der augenblicklichen Bewegung läßt sich nun der Beschleunigungsvektor derart in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegen, daß die eine die Richtung der Bahntangente und die andere die Richtung der Bahnnormalen hat. Diese beiden Komponenten werden als die Tangential- und die Normalbeschleunigung bezeichnet. Einfache mathematische Betrachtungen, die in einem späteren Kapitel wiedergegeben werden mögen, führen zu folgendem Ergebnis: Die Tangentialbeschleunigung ist gleich dem zeitlichen Differentialquotienten des Geschwindigkeitsbetrages; die Normalbeschleunigung ist gleich dem Quotienten aus dem Quadrate des Geschwindigkeitsbetrages und dem Krümmungshalbmesser. Bezeichnen wir die beiden Komponenten mit b_t und b_n und den Krümmungsradius mit ϱ, so ist

$$b_t = \frac{dv}{dt}, \qquad b_n = \frac{v^2}{\varrho}. \tag{27}$$

§ 9. Die gleichförmige Kreisbewegung.

Ein besonders einfacher Fall einer krummlinigen Bewegung liegt vor, wenn die Bahn kreisförmig und der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist. Man spricht dann von einer gleichförmigen Kreisbewegung. Für eine solche verschwindet (nach Gl. 27) die Tangentialbeschleunigung, so daß der Beschleunigungsvektor immer die Richtung der Bahnnormalen hat, also zum Kreismittelpunkt gerichtet ist. Man nennt in diesem Falle die Beschleunigung, die trotz der Konstanz des Geschwindigkeitsbetrags durch die ständige Änderung der Bewegungsrichtung hervorgerufen wird, die Zentripetalbeschleunigung. Da in dem betrachteten Sonderfall der Krümmungsradius durch den Kreishalbmesser dargestellt wird (der mit r bezeichnet werde), so gilt demnach für die Zentripetalbeschleunigung b die Formel

$$b = \frac{v^2}{r}. \tag{28}$$

Bezeichnet man die Umlaufszeit mit T, so kann die Zentripetalbeschleunigung auch in der Form dargestellt werden

$$b = \frac{4\pi^2 r}{T^2}, \tag{29}$$

(denn es ist $2 r \pi$ gleich $v T$)

§ 10. Die Flächengeschwindigkeit.

Die Bewegung eines Massenpunktes können wir auch derart beschreiben, daß wir von einem festen Bezugspunkte aus einen Vektor zu dem bewegten Massenpunkte ziehen und die Veränderung dieses sogenannten Radiusvektors mit der Zeit (nach Richtung und Betrag) untersuchen. Wenn im besonderen die Bewegung in einer Ebene erfolgt, in der dann zweckmäßig auch der feste Bezugspunkt gewählt wird, so liegt es nahe, die Größe der Fläche ins Auge zu fassen, die in einer beliebigen Zeit der Radiusvektor beschreibt. Ein besonders einfacher Fall liegt dann vor, wenn der Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen zurücklegt. Die in der Zeiteinheit beschriebene Fläche wird dann als die Flächengeschwindigkeit bezeichnet*). Rein mathematische Überlegungen (auf die erst später näher eingegangen werde) führen zu dem wichtigen Satz, daß in dem Falle konstanter Flächengeschwindigkeit die Beschleunigung zu dem festen Bezugspunkte gerichtet sein muß, von dem aus der Radiusvektor zu dem bewegten Massenpunkte bezogen wird.

---

*) Häufig wird auch das Doppelte dieser Größe so genannt.

Ganz allgemein können wir den Betrag der Flächengeschwindigkeit definieren als den Grenzwert, der sich ergibt, wenn die in einem Zeitintervall Δt durchstrichene Fläche durch Δt dividiert wird und Δt immer kleiner wird. Auch die Flächengeschwindigkeit läßt sich als Vektor darstellen. Man gibt diesem Vektor, dessen Länge man dem Betrag gleich macht, eine Richtung, die auf dem durchstrichenen Flächenelement senkrecht steht, und einen solchen Richtungssinn, daß von der Spitze des Vektors aus gesehen, die Bewegung entgegengesetzt dem Uhrzeiger verläuft (Fig. 2).

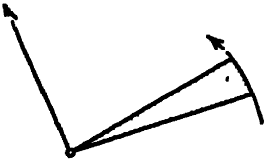


Fig. 2.

§ 11. Die Zusammensetzung von Bewegungen.

Betrachten wir zwei Bewegungen, für die wir denselben festen Bezugspunkt wählen, so definieren wir eine Bewegung als aus den beiden Bewegungen zusammengesetzt, wenn für sie in jedem Augenblick der von dem Bezugspunkt aus gezogene Radiusvektor gleich ist der vektoriellen Summe der Größen, die in dem betreffenden Augenblick die von dem Bezugspunkte aus gezogenen Radienvektoren für die beiden Einzelbewegungen hätten.

Ist der feste Bezugspunkt der Punkt O (Fig. 3) und sind A und B die Stellen, an denen sich in einem bestimmten Augenblick der Massenpunkt bei den beiden Einzelbewegungen befände, so ist die Stelle C, an der sich in dem betreffenden Augenblick der Massenpunkt bei der zusammengesetzten Bewegung befindet, durch die vierte Ecke eines Parallelogramms dargestellt, dessen drei andere Ecken von den Punkten O, A und B gebildet werden (vgl. auch die frühere Fig. 1). Man bezeichnet dieses Parallelogramm als das Bewegungsparallelogramm.

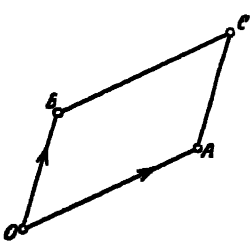


Fig. 3.

Da der Geschwindigkeitsvektor immer der zeitliche Differentialquotient des von einem Bezugspunkt aus gezogenen Radiusvektors und der Beschleunigungsvektor wieder der zeitliche Differentialquotient des Geschwindigkeitsvektors ist, so ist es selbstverständlich, daß sich der Geschwindigkeitsvektor der zusammengesetzten Bewegung durch vektorielle Addition der Einzelgeschwindigkeiten und der Beschleunigungsvektor der zusammengesetzten Bewegung durch vektorielle Addition der Einzelbeschleunigungen ergeben. Man kann also auch die resultierende Geschwindigkeit durch Konstruktion

des sogenannten Geschwindigkeitsparallelogramms und die resultierende Beschleunigung durch Konstruktion eines Beschleunigungsparallelogramms finden.

Aus dem Prinzip des Bewegungsparallelogramms folgt ohne weiteres, daß die Zusammensetzung zweier verschieden gerichteter, geradliniger, gleichförmiger Bewegungen wiederum eine geradlinige gleichförmige Bewegung ergibt (Fig. 4). Dagegen resultiert aus zwei verschieden gerichteten gleichförmig beschleunigten, geradlinigen Bewegungen nur dann wiederum eine geradlinige Bewegung, wenn bei beiden Einzelbewegungen die Beschleunigung denselben Wert hat. Es ergibt somit auch die Zusammensetzung einer geradlinigen, gleichförmigen und einer geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung eine krummlinige

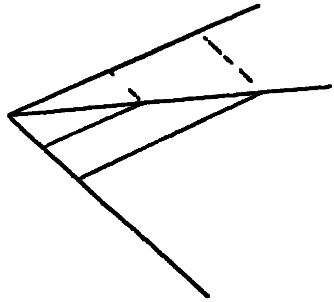


Fig. 4.

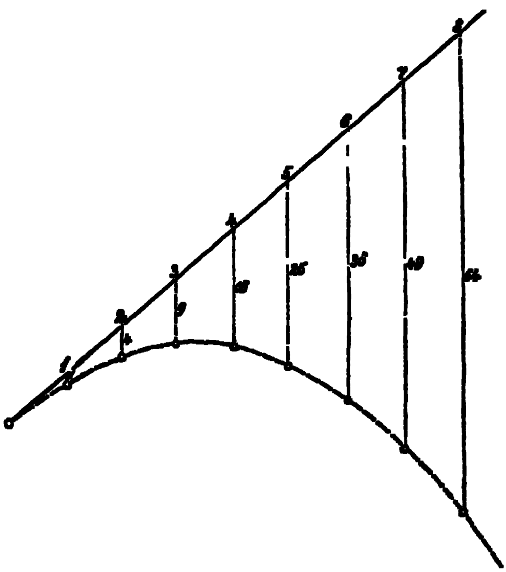


Fig. 5.

Bahn, und zwar ist diese, wie aus elementaren geometrischen Betrachtungen folgt, parabolisch. Fig. 5 zeigt für eine derart zusammengesetzte Bewegung die Konstruktion der Bahn mittels der Bewegungsparallelogramme für die Zeiten von 1, 2, 3, 4 Sekunden usw. Der schräge Weg ist der gleichförmig zurückgelegte, der

vertikale der mit konstanter Beschleunigung durchlaufene, so daß sich die vertikalen Wege wie die Quadrate der Zeiten verhalten.

Von besonderem Interesse sind auch die Bewegungen, die durch Zusammensetzung einer gleichformigen geradlinigen und einer gleichformigen Kreisbewegung entstehen. Hierbei sind wiederum zwei Spezialfälle von besonderer Einfachheit. In beiden Fällen führe die geradlinige Bewegung durch den Kreismittelpunkt, doch möge im ersten Fall die gerade Linie zur Kreisebene senkrecht sein, im zweiten Falle aber in der Ebene des Kreises liegen. Im ersten Fall entsteht eine sogenannte Schraubenbewegung, im zweiten eine zykloidische Bewegung. Die Bahn ist im ersten Fall eine Schraubenlinie, im zweiten eine Zykloide (Fig. 6). Die Zykloide wird auch als Radlinie bezeichnet; denn eine zykloidische Bewegung wird von jedem Punkte des Umfangs eines Rades zurückgelegt, das auf einer geraden Bahn rollt.

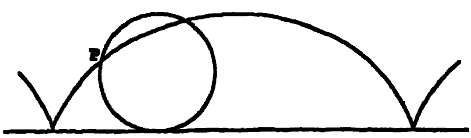


Fig. 6.

§ 12. Die Zerlegung von Bewegungen.

Ebenso wie eine Kurve kann auch eine Bewegung auf eine beliebige Gerade projiziert werden. Die projizierte Bewegung erhalten wir, indem wir uns in jedem Zeitelement das Stuck der Geraden durchlaufen denken, das die Projektion des in demselben Zeitelement durchlaufenen Stuckes der tatsächlichen Bahn darstellt. Projizieren wir derart eine Bewegung, die in einer ebenen Kurve verläuft, auf zwei zueinander senkrechte Gerade, die mit der Bahn in derselben Ebene liegen, so muß die Zusammensetzung der beiden Projektionen wiederum die tatsächliche Bewegung ergeben. Im allgemeinen kann man somit jede krummlinige Bewegung in drei beliebige, zueinander senkrechte, geradlinige Teilbewegungen zerlegen. Aus den Prinzipen des Bewegungs-, des Geschwindigkeits- und des Beschleunigungsparallelogramms folgt, daß die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der drei Partialbewegungen nichts anderes sind als die Komponenten der tatsächlichen Geschwindigkeit und Beschleunigung nach den betreffenden Geraden. So erklärt sich die große Bedeutung der analytischen Geometrie für die Mechanik dadurch, daß sie die Zurückführung des komplizierteren Problems der krummlinigen Bewegung auf das einfachere Problem der geradlinigen Bewegung ermöglicht.

§ 13. Zusammensetzung und Zerlegung von Schwingungen.

Zwei Schwingungen, die in derselben Geraden mit gleicher Periode erfolgen, müssen sich, wie ohne weiteres klar ist, zu einer Schwingung von gleicher Periode in derselben Geraden zusammensetzen. Haben sie keinen Phasenunterschied, d. h. dieselbe Phasenkonstante, so ist die resultierende Amplitude einfach gleich der Summe der Einzelamplituden, und die resultierende Elongation ist dann in jedem Augenblicke gleich der Summe der Elongationen, die den Einzelschwingungen zukommen. Haben die beiden Schwingungen einen Phasenunterschied von einer halben Periode (sind sie, wie man zu sagen pflegt, in der Phase entgegengesetzt), so ist die resultierende Amplitude gleich der Differenz der Einzelamplituden. Zwei in der Phase entgegengesetzte Schwingungen, die mit gleicher Amplitude und Periode in derselben Geraden erfolgen, heben daher einander wechselseitig auf. Auch bei beliebigem Phasenunterschied setzen sich zwei in derselben Geraden mit gleicher Periode erfolgende Schwingungen wiederum zu einer geradlinigen Schwingung von gleicher Periode zusammen; aus den gegebenen Amplituden und dem gegebenen Phasenunterschied lassen sich die Amplitude der resultierenden Schwingung und ihre Phasenunterschiede gegen die zusammengesetzten Einzelschwingungen leicht berechnen.

Zwei Schwingungen, die in verschiedenen Geraden erfolgen, setzen sich nur dann zu einer geradlinigen Schwingung zusammen, wenn sie bei gleicher Periode keine Phasenverschiedenheit oder eine solche von einer halben Periode aufweisen. Sonst ergibt die Zusammensetzung zweier in verschiedenen Geraden mit gleicher Periode erfolgenden Schwingungen im allgemeinen, wie geometrische Deduktionen zeigen, eine mit derselben Periode vor sich gehende periodische Bewegung in einer elliptischen Bahn, eine sogenannte elliptische Schwingung. Die elliptische Schwingung ist der allgemeinste Bewegungsvorgang, bei dem der Beschleunigungsvektor in entgegengesetzter Richtung dem von einem festen Punkte aus gezogenen Radiusvektor proportional ist, bei dem also die in das Vektorielle erweiterte Gl. 14 erfüllt ist.

Die früher betrachtete schwingende Bewegung in einer geraden Linie stellt als lineare Schwingung natürlich nur einen Spezialfall der elliptischen Schwingung dar. Ein anderer Spezialfall ist als zirkulare Schwingung die ebenfalls schon früher betrachtete gleichförmige Kreisbewegung. Zu ihr setzen sich zwei in verschiedenen Geraden erfolgende lineare Schwingungen dann zusammen, wenn die beiden Geraden zueinander senkrecht sind und

die beiden Einzelschwingungen gleiche Periode und Amplitude, jedoch einen **Phasenunterschied von einer Viertelperiode** haben. Wenn bei der Kreisbewegung der zirkular schwingende Massenpunkt in Fig. 7 den Punkt A passiert, ist bei der Teilschwingung in der Geraden OA gerade die Amplitude bei A erreicht, während bei der dazu senkrechten Teilschwingung in der Geraden OB eben die Ruhelage bei O passiert wird. Das Umgekehrte ist der Fall, wenn der zirkular schwingende Massenpunkt die Stelle B passiert.

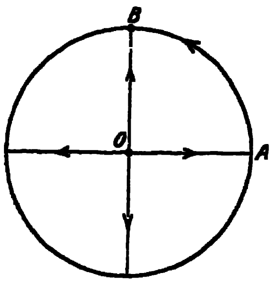


Fig. 7.

Zwei zirkulare Schwingungen werden als **entgegengesetzt** bezeichnet, wenn sie bei gleicher Amplitude (also gleichem Radius) und gleicher Periode entgegengesetzten Umlaufssinn haben, wenn also von einer Stelle aus gesehen, die eine Bewegung entgegengesetzt dem Uhrzeiger und die andere im Sinne des Uhrzeigers verläuft. Es ist ohne weiteres klar, daß durch die Zusammensetzung zweier entgegengesetzter zirkularer Schwingungen eine **lineare** Schwingung resultiert, deren Amplitude doppelt so groß ist wie die der zirku-

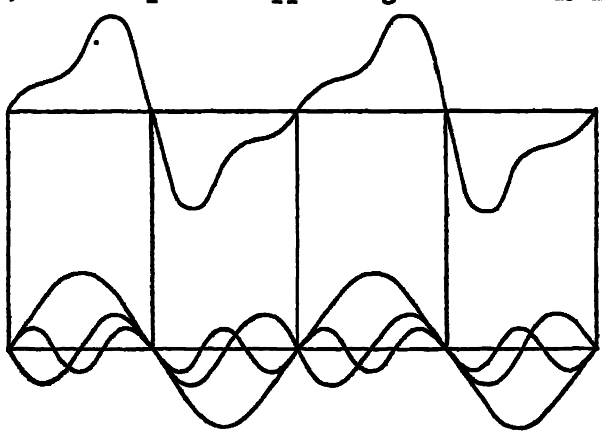


Fig. 8.

laren Schwingungen. Ihre Richtung ist durch die beiden diametral gegenüber liegenden Stellen des Kreises bestimmt, in denen die entgegengesetzten zirkularen Schwingungen ständig zusammentreffen.

Ebenso wie jede beliebige krummlinige Bewegung kann natürlich auch eine krummlinige Schwingung in **geradlinige Teilschwingungen** zerlegt werden. Erfolgt die Zerlegung bei

einer elliptischen Schwingung in der Ellipsenebene nach zwei beliebigen, jedoch zueinander senkrechten Achsen, so sind die Teilbewegungen lineare Schwingungen von gleicher Periode, jedoch verschiedener Phase und im allgemeinen auch verschiedener Amplitude. Der Phasenunterschied wird im besonderen gleich einer Viertelperiode, wenn die beiden Geraden, nach denen die Zerlegung vorgenommen wird, mit den Achsen der Ellipse zusammen-

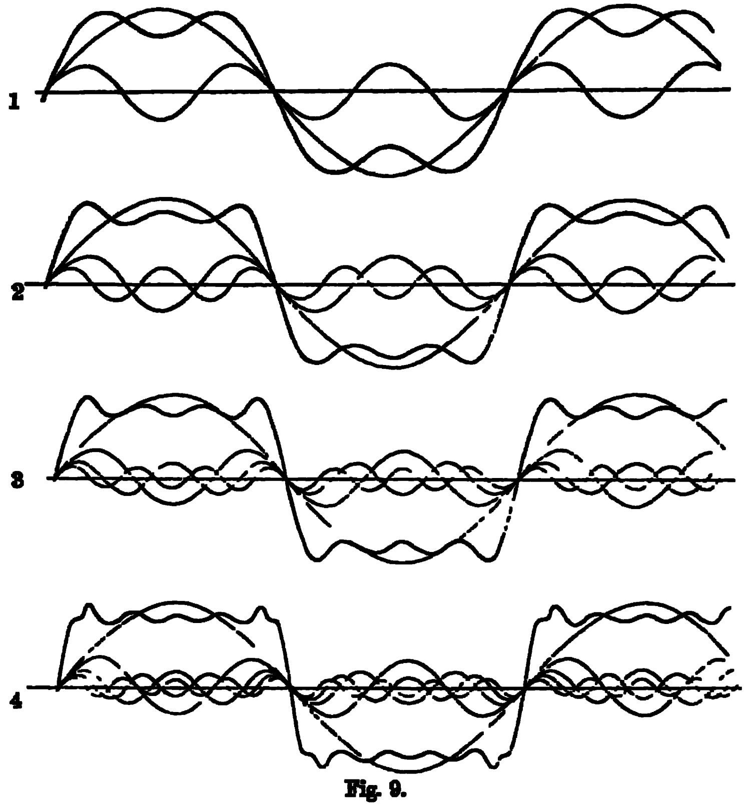


Fig. 9.

fallen. Insbesondere läßt sich nach dem früher Gesagten eine zirkulare Schwingung immer in zwei Teilschwingungen zerlegen, die in zwei beliebigen, jedoch zueinander senkrechten Geraden mit gleicher Amplitude und einem Phasenunterschied von einer Viertelperiode erfolgen. Andererseits läßt sich eine lineare Schwingung auch immer in zwei entgegengesetzte zirkulare von halber Amplitude zerlegen.

Durch Zusammensetzung von Schwingungen von verschiedener Periode entsteht wiederum eine periodische Bewegung, die, obwohl nicht durch eine einfache Sinusfunktion darstellbar, dennoch

die Eigentümlichkeit hat, daß sich in bestimmten, gleichbleibenden Intervallen die Werte der Elongation (und zugleich auch der Geschwindigkeit und der Beschleunigung) ständig wiederholen. Die Periode der resultierenden Bewegung ist dabei gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der zusammengesetzten Perioden. Fig. 8 und die Figg. 9 mögen spezielle Beispiele einer derartigen Zusammensetzung veranschaulichen. Die Kurven dieser Figuren stellen die Elongation in ihrer Abhängigkeit von der Zeit graphisch dar. Die Elongation ist als Ordinate, die Zeit als Abszisse aufgetragen, die resultierende Kurve stets stärker gezeichnet. Die Kurven beziehen sich allerdings nur auf solche Spezialfälle, in denen sich die zusammengesetzten Perioden wie einfache ganze Zahlen untereinander verhalten.

§ 14. Bezugssystem und Relativbewegung.

Da wir unter der Bewegung eines Körpers seine Lagenänderung in bezug auf andere Körper verstehen, so muß der Betrachtung der Bewegung eines Massenpunktes stets ein bestimmtes Bezugssystem zugrundegelegt werden, das durch andere, als fest angesehene Massenpunkte bestimmt ist. Ein solches Bezugssystem muß natürlich so beschaffen sein, daß zwischen zwei darauf bezogenen beweglichen Massenpunkten keine wechselseitigen Lagenänderungen möglich sind, wofern die Entfernungen der beiden in bezug auf das Bezugssystem ungeändert bleiben.

Aus fundamentalen geometrischen Vorstellungen folgt, daß ein solches Bezugssystem durch drei Massenpunkte mit unveränderlichen wechselseitigen Entfernungen festgelegt ist, wofern die drei Massenpunkte nicht in einer einzigen Geraden liegen. Ein einziger fester Massenpunkt könnte nicht genügen, weil ja bei konstanter Distanz von diesem festen Punkt die beiden beweglichen Massenpunkte gleichwohl ihre wechselseitige Entfernung beliebig ändern könnten, wofern sie nur auf zwei Kugelflächen bleiben, die jenen festen Punkt zum Zentrum haben. Auch zwei feste Punkte können nicht genügen; denn auch in diesem Falle wären Änderungen des wechselseitigen Abstandes der beiden beweglichen Massenpunkte bei konstanten Entfernungen von den festen Punkten möglich; es müßten dazu nur die beweglichen Massenpunkte auf den Peripherien zweier Kreise bleiben, deren Ebenen senkrecht zu der Verbindungslinie der beiden festen Punkte sind. Durch drei feste Punkte aber, die nicht in einer Geraden liegen, kann stets ein räumliches Koordinatensystem festgelegt werden; man macht dazu den einen Punkt zum Ursprung, die Verbindungslinie zwischen ihm und dem

zweiten Punkte etwa zur x-Achse und die Ebene, in der die drei Punkte liegen, etwa zur x-y-Ebene, wodurch auch die Lage der dritten Achse festgelegt ist*). Dann ist es natürlich ausgeschlossen, daß sich der Abstand zwischen den beiden beweglichen Massenpunkten ändert, wofern ihre, die Entfernungen von dem Bezugssystem ausdruckenden **Koordinaten** ungeändert bleiben. Erst durch die Einführung eines Bezugssystems gewinnt auch der Begriff der **Richtung** einen bestimmten Sinn; erst wenn ein Bezugssystem irgendwelcher Art festgelegt ist, kann eine Bewegung durch einen von einem festen Bezugspunkt aus gezogenen, veränderlichen Radiusvektor beschrieben werden.

Der Kinematik entsteht nun ein wichtiges Problem in der Frage, wie die Bewegung eines Massenpunktes, die in bezug auf ein System S bekannt ist, in bezug auf ein anderes System S′ beschaffen ist, wofern die Bewegung des Systems S′ in bezug auf das System S gegeben ist. Die Bewegung in bezug auf das System S′ wird dann mit einem üblichen (aber nicht sehr zweckmäßigen) Ausdruck als **Relativbewegung** bezeichnet. Da jedes Bezugssystem durch ein Koordinatensystem ersetzt werden kann, so muß der Losung des Problems

*) Es bedarf allerdings noch einer **generellen** Festsetzung hinsichtlich des Richtungssinns der dritten Achse, nämlich darüber, welcher Zweig der dritten Achse als der positive anzusehen ist. Es bestehen in dieser Hinsicht zwei Möglichkeiten. Man kann etwa die positive z-Achse so wählen, daß von ihrer Spitze aus gesehen, die Drehung, die auf kürzestem Weg die positive x-Achse in die Richtung der positiven y-Achse überführt,

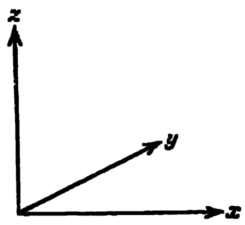


Fig. 10.

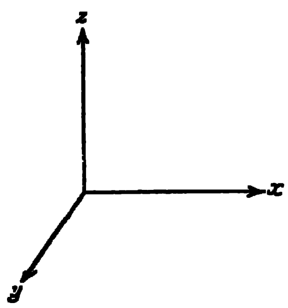


Fig. 11.

dem **Uhrzeiger entgegengesetzt** erscheint (Fig. 10) oder aber so, daß diese Drehung im Sinne des Uhrzeigers zu erfolgen scheint (Fig. 11). Im ersten Fall wird das Koordinatensystem als **englisches** oder Rechtssystem, im zweiten Falle als **französisches** oder Linkssystem bezeichnet. Da für die Beschreibung elektromagnetischer Vorgänge das englische Koordinatensystem vorteilhafter ist, ist es in der theoretischen Physik heute allgemein gebräuchlich.

der Relativbewegung jedesfalls die Untersuchung der Frage vorangehen, von welcher Art die wechselseitigen Lagenänderungen zweier Koordinatensysteme sein können.

§ 15. Translation und Rotation.

Zwei Koordinatensysteme sind in bezug aufeinander offenbar dann in Ruhe, wenn sich weder der Abstand ihrer Ursprünge noch die Winkel ändern, die ihre Achsen wechselseitig miteinander einschließen. Da für kinematische Betrachtungen ein Koordinatensystem jedesfalls beliebig mit einem anderen vertauscht werden kann, das ihm gegenüber in Ruhe ist, so ist es klar, daß alle wechselseitigen Bewegungen zweier Koordinatensysteme auf zwei Spezialfälle zurückgeführt werden können. Im ersten Spezialfall bewegen sich zwei Koordinatensysteme gegeneinander mit parallel bleibenden Achsen; im zweiten Sonderfall ändern sich die Richtungen der beiderseitigen Achsen gegeneinander, während die Ursprünge beider Systeme dauernd zusammenfallen. Die erste Art einer Lagenänderung wird als Translation bezeichnet, die zweite als Rotation.

Für die später zu erörternden experimentellen Untersuchungen kann hier die Betrachtung eines Sonderfalles einer Rotation genügen. Die Rotation möge nämlich gleichmäßig erfolgen und derart, daß ständig nicht nur die Ursprünge, sondern auch zwei Achsen der beiden Koordinatensysteme zusammenfallen. Sehen wir die gemeinsame Achse etwa als z-Achse bzw. z′-Achse an, so möge sich also in der x-y-Ebene die x′-Achse und mit ihr natürlich auch die y′-Achse gleichmäßig drehen. Der in der Zeiteinheit zurückgelegte und im Bogenmaß ausgedrückte Winkel wird dann als die Winkelgeschwindigkeit und die gemeinsame Achse als die Rotationsachse bezeichnet.

Die Winkelgeschwindigkeit kann auch als Vektorgröße aufgefaßt werden; man legt ihr dazu die Richtung der Rotationsachse bei und gibt ihr einen solchen Richtungssinn, daß von der Spitze des Vektors aus gesehen, die Rotation entgegen dem Uhrzeiger verläuft. In dem besprochenen Sonderfall einer Rotation behält der Vektor der Winkelgeschwindigkeit sowohl den Betrag als auch die Richtung unverändert bei; im allgemeinen ändert sich beides.

§ 16. Führungsgeschwindigkeit und Führungsbeschleunigung.

Einen Punkt bezeichnen wir als zu einem Koordinatensystem gehörig oder auch als mit dem System fest verbunden, wenn er in bezug auf dieses System unveränderliche Koordinaten hat. Ist nun dieses System, das wieder S′ genannt werde, gegen ein an-

deres, das wir wieder S nennen wollen, bewegt, so verstehen wir unter Führungsgeschwindigkeit und Führungsbeschleunigung eines Massenpunktes an einer Stelle P die Geschwindigkeit und Beschleunigung, die in bezug auf das System S der Punkt P hat, wenn er mit dem System S′ fest verbunden gedacht wird.

Es ist klar, daß bei einer Translationsbewegung alle mit dem Koordinatensystem fest verbundenen Punkte dieselbe Geschwindigkeit und Beschleunigung haben; man kann daher dann einfach von einer Translationsgeschwindigkeit und einer Translationsbeschleunigung schlechthin sprechen, und diese stellen eben bei einer Translation zugleich die Führungsgeschwindigkeit und die Fuhrungsbeschleunigung eines beliebigen, mit dem Koordinatensystem fest verbundenen Punktes dar.

Bei einer Rotation hängen Führungsgeschwindigkeit und Führungsbeschleunigung von der Lage des Punktes ab. Ist die Rotation von der früher betrachteten Art, wo der Vektor der Winkelgeschwindigkeit nach Betrag und Richtung konstant ist, so ist die Führungsgeschwindigkeit in ihrem Betrage gleich der Winkelgeschwindigkeit, multipliziert mit dem Abstand des betrachteten Punktes von der Rotationsachse. Die Richtung der Führungsgeschwindigkeit ergibt sich aus der Tatsache, daß bei einer solchen Rotation alle mit dem System fest verbundenen Punkte um die Rotationsachse kreisförmige Bahnen in Ebenen beschreiben, die zu der Rotationsachse senkrecht sind. Die Fuhrungsbeschleunigung aber deckt sich bei einer solchen Rotation einfach mit der schon früher besprochenen Zentripetalbeschleunigung. Nennen wir den Abstand des Punktes von der Rotationsachse p und die Winkelgeschwindigkeit w, so gelten daher für Führungsgeschwindigkeit und Führungsbeschleunigung in dem betrachteten Sonderfall die Beziehungen

$$v_f = pw, \quad b_f = pw^2. \tag{30}$$

§ 17. Die Coriolis-Beschleunigung.

Die Relativgeschwindigkeit und die Relativbeschleunigung ergeben sich ganz allgemein aus der Beziehung, daß in jedem Augenblick der von dem Ursprung O zu dem Massenpunkt gezogene Radiusvektor gleich sein muß der vektoriellen Summe aus der gerichteten Strecke, die von dem Ursprung O zum Ursprung O′ führt,

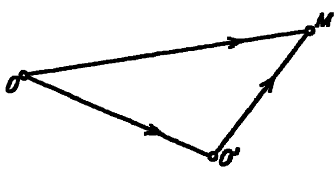


Fig. 12.

und aus dem Radiusvektor, der zu dem in M befindlichen Massenpunkt von dem Ursprung O′ gezogen wird (Fig. 12). Hieraus folgt

sogleich, daß die auf das System S bezogene Geschwindigkeit immer gleich sein muß der vektoriellen Summe aus der Relativ- und der Führungsgeschwindigkeit.

Für die Beschleunigung gilt hingegen, wie einfache geometrische Betrachtungen zeigen, eine analoge Beziehung nicht. Um die Beschleunigung in bezug auf das System S zu erhalten, muß vielmehr zu der vektoriellen Summe aus der Relativbeschleunigung und der Führungsbeschleunigung noch ein Vektor hinzuaddiert werden, der als die Coriolis-Beschleunigung bezeichnet wird (nach dem französischen Physiker, der im Jahre 1829 zuerst die wichtigsten Sätze über die Relativbewegung ableitete).

Die Coriolis-Beschleunigung ist, wie man in der Sprache der Vektorrechnung sagt, das doppelte äußere Vektorprodukt aus der Winkelgeschwindigkeit und der Relativgeschwindigkeit. Ganz allgemein definiert man das äußere Vektorprodukt aus zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, in üblicher Weise bezeichnet mit dem Symbol $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, in folgender Weise: Es soll ein Vektor sein, der auf der Ebene des von den beiden Vektoren gebildeten Parallelogramms senkrecht steht, der so viel Längeneinheiten enthält, als das Parallelogramm Flächeneinheiten hat, und der einen solchen Richtungssinn hat, daß, von seiner Spitze gesehen, die Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt erscheint, die den im Produkt zuerst genannten Vektor in die Richtung des anderen überführt (Fig. 13)*). Auf Grund dieser allgemeinen Definition ist der Betrag der Coriolis-Beschleunigung durch die Beziehung gegeben

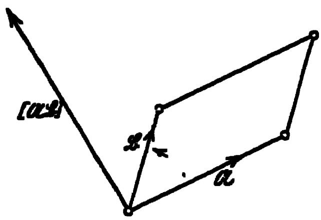


Fig. 13.

$$b_{Cor} = 2 w v_r \sin\varphi, \tag{31}$$

wenn φ der Winkel ist, den die Vektoren der Winkelgeschwindigkeit und der Relativgeschwindigkeit miteinander einschließen. Der Vektor der Coriolis-Beschleunigung ist nach dem früher Gesagten sowohl senkrecht zur Rotationsachse als auch zur augenblicklichen Richtung der Relativbewegung; sein Richtungssinn ergibt sich aus der Forderung, daß, von seiner Spitze gesehen, die Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt erscheint, die auf kürzestem Wege den Vektor der Winkelgeschwindigkeit in die Richtung des Vektors der Relativgeschwindigkeit überführt, wenn beide Vektoren von einem und demselben Punkte aus konstruiert werden.

*) Das Vektorprodukt $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]$ ist daher dem Vektorprodukt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ entgegengesetzt.

Zweites Kapitel.

Die fundamentalen Erfahrungstatsachen der Mechanik.

§ 18. Das Beharrungsvermögen.

Die bloß oberflächliche Betrachtung der alltäglichen Bewegungsvorgänge scheint richtige mechanische Erkenntnisse weit eher zu verhindern als zu fördern. Denn die alltägliche Erfahrung zeigt uns einerseits im Niederfallen der Korper Bewegungen, und zwar beschleunigte Bewegungen, die ganz von selbst, ganz spontan, also ohne jede merkliche Ursache vor sich zu gehen scheinen; andererseits zeigt uns die alltägliche Erfahrung, daß Bewegungen, die nicht nach abwärts gehen, einen „Aufwand an Kraft", eine direkte oder indirekte Tätigkeit des Menschen oder anderer lebender Wesen erfordern und stets nur eine bestimmte, meist kurze Zeit hindurch andauern, innerhalb deren die erteilte Geschwindigkeit auf Null sinkt, die Bewegung sich also gleichsam von selbst „aufzehrt".

In der Tat beruht auf diesen oberflächlichen Wahrnehmungen die antike Dynamik, die vor allem durch Aristoteles ausgebildet wurde*). Sie unterschied „natürliche" und „erzwungene" Bewegungen. Wahrend die ersteren spontan eintreten und verlaufen sollten, sollte bei den letzteren ein „Aufwand an Kraft" nicht nur zu ihrer Einleitung, sondern auch zu ihrer Aufrechterhaltung notwendig sein.

Aber schon eine etwas aufmerksamere Beobachtung mußte in Verbindung mit einfachen Schlüssen die Unhaltbarkeit dieser Vorstellung erweisen, und das hierzu geeignetste Phänomen war jedesfalls eine „erzwungene" Bewegung, bei der die erforderliche „Kraft" durch eine vorangegangene „natürliche" Bewegung des bewegten Körpers geliefert wird. Ein Phänomen dieser Art liegt dann vor, wenn ein Körper durch eine irgendwie geartete Abwärtsbewegung eine gewisse Geschwindigkeit erlangt und mit dieser nun eine irgendwie geartete Aufwärtsbewegung ausführt. Die Beobachtung zeigt dann, daß bis auf eine kleine Differenz bei der Aufwärtsbewegung immer wieder das horizontale Ausgangsniveau erreicht wird, und daß die erwähnte Differenz dadurch verringert werden kann, daß man etwa die Glätte des bewegten Körpers und der Bewegungsunterlage verbessert oder aber die Dichte des Mittels herabsetzt, in dem die Bewegung stattfindet.

*) Vgl. des Verf. Abhandlung „Die Grundlagen der antiken Dynamik". Arch. f. Gesch. d. Naturwissenschaft u. d. Technik 1, S. 19—47 (1908).

Derartige Beobachtungen hat planmäßig zuerst Galilei um das Jahr 1580 angestellt, und er hat das Ergebnis seiner Beobachtungen in dem Satze ausgedrückt, daß bei einer von Bewegungshindernissen freien Aufwärtsbewegung das Ausgangsniveau wieder vollständig erreicht werden müßte.

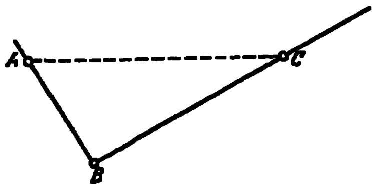


Fig. 14.

Das einfachste Experiment, das man zur angenäherten Bestätigung dieses Satzes ausführen kann, besteht wohl darin, daß man eine Kugel eine schiefe Ebene von einem Punkte A aus hinabrollen und mit der erlangten Geschwindigkeit sodann eine andere schiefe Ebene hinaufrollen läßt, die in B mit der ersten schiefen Ebene zusammenstößt (Fig. 14). Man wird dann finden, daß die Kugel bis auf eine gewisse Differenz der Stelle C nahe kommen wird, die in demselben horizontalen Niveau wie die Ausgangsstelle A liegt.

Geringer wird die Differenz im allgemeinen jedoch dann, wenn man die Abwärtsbewegung eines pendelnden kleinen Körpers in seiner kreisförmigen Bahn benutzt; derart hat Galilei den folgenden Versuch ausgeführt. Er schlug in eine vertikale Wand, etwa bei A (Fig. 15), einen Nagel ein und hing an diesen an einem dünnen Faden AB eine schwere Kugel. Er brachte die Kugel nach C und ließ sie den durch den Punkt B führenden Kreisbogen beschreiben, wobei er feststellte, daß die Kugel nur um ein ganz kleines Stück unter dem horizontalen Niveau CD zurückblieb. Dann schlug er in die Wand bei E oder F einen Nagel ein, wodurch der Faden, wenn er aus der Lage AC in die Lage AB überging, teilweise aufgehalten wurde. Galilei stellte fest, daß sich die Kugel wiederum, von einer geringen Abweichung abgesehen, bis zu der horizontalen Linie CD bewegte, wobei sie entweder den Bogen BG oder BJ beschrieb.

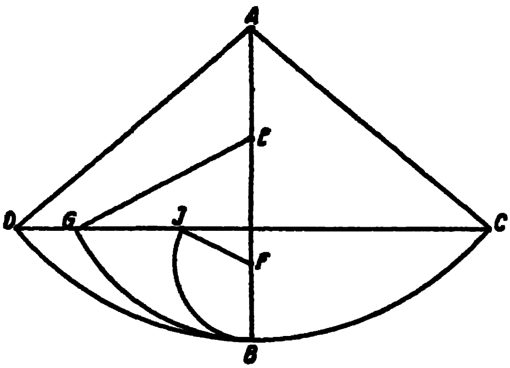


Fig. 15.

Wir wollen uns nun, indem wir Galileis Gedankengängen folgen,

den durch die frühere Fig. 14 angedeuteten Versuch mit einer idealen, von Bewegungshindernissen völlig freien Bewegung in einem Gedankenexperiment wiederholt denken, indem wir zugleich die zweite schiefe Ebene BC immer stärker und stärker neigen (Fig. 16). Die Strecke, die die Kugel mit stets gleicher Anfangsgeschwindigkeit in der Aufwärtsbewegung durchläuft, bevor die Geschwindigkeit Null wird, wird dann immer länger und länger. Wenn wir daher zu einer horizontalen Bewegung als dem Grenzfall übergehen, so müßte somit bei dieser, wofern alle Bewegungshindernisse fehlen, „unendlich viel" Zeit vergehen, bevor diese Bewegung erlischt. Eine solche von Bewegungshindernissen vollkommen freie Idealbewegung stellt aber den gemeinsamen Grenzfall zwischen der beim Fehlen aller Hindernisse stets beschleunigten Abwarts- und der stets verzögerten Aufwärtsbewegung dar; sie kann daher nur mit gleichbleibender Geschwindigkeit zurückgelegt werden.

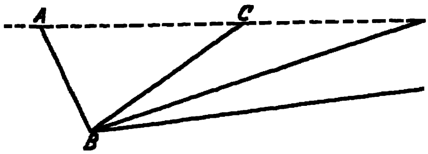


Fig. 16.

Aus dieser Erkenntnis mussen wir schließen, daß auch zu der Erhaltung einer wirklichen gleichförmigen. geradlinigen Bewegung nur insoweit ein „Aufwand an Kraft", wie man in der Alltagssprache zu sagen pflegt, erforderlich ist, als er der Kompensation der hemmenden Wirkung von Bewegungshindernissen dient.

§ 19. Die Abwärtsbewegung.

Daß gleich dem freien Fall jede Abwärtsbewegung, wie schon erwähnt, beschleunigt ist, also mit wachsender Geschwindigkeit vor sich geht, zeigt schon die grobe Beobachtung. Um mit einfachen Mitteln die kinematischen Eigentümlichkeiten einer solchen Bewegung zu ergründen, bediente sich Galilei seiner berühmten Fallrinne; mittels dieser konnte er feststellen, daß, wofern von den durch die Bewegungshindernisse bedingten kleinen Abweichungen abstrahiert wird, bei der Abwärtsbewegung die von dem Bewegungsbeginn an durchlaufenen Wege sich wie die Quadrate der seit dem Beginne verflossenen Zeiten verhalten.

Galilei benutzte bei diesen Versuchen, wie er selbst berichtet, ein Brett von zwölf Ellen (etwa 8 m) Länge, das auf der nach oben gekehrten Schmalseite mit einer Rinne versehen war, die zur Verminderung der Reibung mit sehr glattem Pergament gefüttert war. In dieser Rinne ließ Galilei eine sehr harte, völlig runde und glatt polierte Messingkugel laufen; das Brett wurde dabei auf der einen

Seite hoch gehoben. Galilei maß nun die Zeit, die bei einem bestimmten Neigungswinkel die Kugel zum Durchlaufen der ganzen Fallrinne brauchte und verglich diese Zeit mit derjenigen, in der die Kugel von dem hochsten Punkte aus bestimmte Bruchteile der Strecke ($^1/_4$, $^2/_3$, $^3/_4$ usw.) zurücklegte. Die Zeit wurde hierbei durch Abwägung der Wassermenge gemessen, die in der betreffenden Zeit aus einem mit einer kleinen Bodenöffnung versehenen Eimer floß. Bei „wohl hundertfacher Wiederholung“, so berichtet Galilei, fand er, daß sich stets die Strecken wie die Quadrate der Zeiten verhielten, und zwar fand er dieses Gesetz bei jeder beliebigen Neigung der Fallrinne erfüllt. Aus den in einem früheren Abschnitt (§ 3) abgeleiteten Beziehungen folgt somit, wie auch schon Galilei erkannte, daß die Abwärtsbewegung gleichförmig beschleunigt ist; die Momentangeschwindigkeit nimmt linear mit der Zeit zu.

Galilei verglich ferner die Bewegungen auf verschieden geneigten Ebenen miteinander und stellte fest, daß sich hierbei die Beschleunigungen so verhalten wie die Sinus der Neigungswinkel. Da wir bei dem freien, vertikalen Fall die Beschleunigung jedesfalls als einen vertikal nach abwärts gerichteten Vektor aufzufassen haben, so ist demnach bei der Bewegung langs einer schiefen Ebene die Beschleunigung gleich der Komponente jenes Vektors nach der Längsrichtung der schiefen Ebene (in Fig. 17 ist die Länge der schiefen Ebene durch AB, der Beschleunigungsvektor durch EF, die Komponente in der Ebenenrichtung durch EG dargestellt; mit α ist der Neigungswinkel CAB bezeichnet).

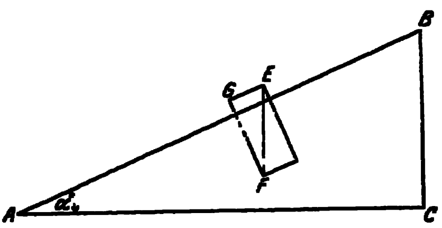


Fig. 17.

Vor allem aber ergaben Galileis Versuche das höchst bedeutungsvolle Resultat, daß bei gegebener Neigung die Beschleunigung völlig unabhängig von allen individuellen Eigenschaften des bewegten Körpers ist. Sie ist unabhängig von seiner stofflichen Beschaffenheit, von seiner Gestalt, seiner Oberfläche, seinem Volumen und vor allem auch von seinem Gewicht. Im besonderen folgt daraus, daß die Beschleunigung des freien Falles eine allgemeine Konstante darstellen muß, daß, wie man knapp sagt, alle Körper gleich rasch fallen.

Dieser Satz gilt natürlich nur für eine von Bewegungshindernissen freie Bewegung, und ihm widerspricht darum nicht die grobe Er-

fahrungstatsache, daß etwa ein Papierschnitzel langsamer zu Boden fällt als eine Bleikugel. Je größer die Oberfläche im Verhältnis zum Gewicht ist, desto größer ist nämlich der Luftwiderstand. Daß das beobachtbare Zurückbleiben leichterer Körper tatsächlich nur durch den Luftwiderstand verursacht wird, läßt sich leicht mittels des in Fig. 18 abgebildeten Apparates zeigen. Er besteht aus einer ungefähr 150 cm langen und etwa 7 cm weiten Glasröhre, die an beiden Enden verschlossen ist. An einem Ende trägt die Röhre einen Hahn und ein Ansatzstück, mittels dessen die Röhre an eine Luftpumpe angeschraubt werden kann. Die Röhre enthalte etwa eine Bleikugel, ein Korkstück und eine kleine Feder. Indem man die Röhre abwechselnd auf eines der beiden Enden stellt, kann man beliebig oft den Vorgang des Niederfallens der eingeschlossenen Körper wiederholen. Ist nun die Röhre evakuiert, so nimmt man in der Tat wahr, daß die verschiedenen Körper genau gleich schnell fallen. Läßt man allmählich wieder Luft einströmen, so bleibt die Feder wiederum hinter dem Korkstück und dieses hinter der Bleikugel zurück, und zwar um so mehr, je mehr Luft eingeströmt ist*).



Fig. 18. Fallröhre

Daß das Zurückbleiben wenig dichter Körper in der Tat nur eine Folge des Luftwiderstandes ist, läßt sich auch minder genau durch den folgenden, besonders einfachen Versuch demonstrieren. Auf eine große Münze, die genau horizontal gehalten wird, wird ein kleineres Stück Papier gelegt. Läßt man die Münze mit dem aufgelegten Papier nun niederfallen, so kommt das Papier gleichzeitig mit der Münze an, während es weit hinter ihr zurückbleibt, wenn man es neben ihr niederfallen läßt. Das eine Mal überwindet eben die Münze bereits auch für das Papier den Luftwiderstand, der das andere Mal die Bewegung des Papiers wesentlich hemmt. Daß die Münze genau wagrecht gehalten wird, ist deshalb notwendig, weil sonst Luft zwischen sie und das Papier eindringt.

Die für alle Körper gleiche Beschleunigung des freien

*) Versuche mit der evakuierten Fallröhre waren natürlich erst nach Galilei möglich. Galilei stellte seine berühmten Fallversuche am schiefen Turm in Pisa an und widerlegte durch sie die merkwürdige, von den Anhängern des Aristoteles vertretene Auffassung, daß ein doppelt so schwerer Körper doppelt so rasch falle.

Falls läßt sich leicht aus Beobachtungen an der schiefen Ebene ermitteln, weil ja für einen Neigungswinkel α die Beschleunigung der Abwärtsbewegung immer gleich ist jener Beschleunigung mal dem Sinus des Winkels α. Die Versuche ergeben so für die Beschleunigung des freien Falles einen Wert von etwa 980 cm sec^{-2}; genauere Angaben hierüber werden in einem späteren Abschnitt folgen.

§ 20. Das Beharrungsvermögen.

Wenn im Sinne der groben primitiven Beobachtung zwischen „natürlichen" und „erzwungenen" Bewegungen unterschieden wird, so muß für die Erforschung der Bewegungsgesetze jedesfalls eine besondere Bedeutung dem einfachsten Phänomen zukommen, bei dem eine „natürliche" und eine „erzwungene" Bewegung miteinander kombiniert erscheinen. Dieses Phänomen ist die Wurfbewegung, und es ist daher begreiflich, daß sich mit ihr der Begründer der exakten Dynamik, Galilei, besonders eingehend befaßte.

Durch genauere Beobachtungen konnte Galilei bald feststellen, daß sich die Wurfbewegung gemäß dem Prinzip des Bewegungsparallelogramms aus einer gleichförmigen Bewegung in der Wurfrichtung und einer vertikalen, gleichförmig beschleunigten Fallbewegung zusammensetzt. Dies geht am deutlichsten aus der parabolischen Form der Wurfbahn hervor, wie dies ja nach den Darlegungen eines früheren Abschnittes (§ 11) das notwendige Ergebnis einer derartigen Zusammensetzung sein muß. Allerdings erfährt die Form der Bahn, wie bereits Galilei wußte, durch den Luftwiderstand gewisse Modifikationen.

Die parabolische Gestalt der Wurfbahn läßt sich am einfachsten mit Hilfe von Wasserstrahlen demonstrieren, die man aus einem Gefäß derart austreten läßt, daß während des Ausflusses der den Ausfluß bewirkende Druck konstant bleibt. Man erreicht dies mittels einer in einem späteren Kapitel zu besprechenden Vorrichtung, die als Mariottesche Flasche bekannt ist. Eine solche Flasche wird auf ein Brett gestellt und an einem an ihr angebrachten Hahn (h) ein Gummischlauch angesetzt, der eine enge Ausflußmündung hat (Fig. 19). Auf einer Tafel, die zweckmäßig mit einem Quadratnetz versehen ist, zeichnet man nun zwei Parabeln, deren eine einem horizontalen Wurf entspricht und die durch die linke obere und die rechte untere Ecke der Tafel hindurchgeht; die andere geht, einem schiefen Wurfe entsprechend, durch die beiden unteren Ecken und berührt zugleich die obere Kante der Tafel. Durch entsprechendes

Zusammendrücken des Schlauches kann man die Ausflußgeschwindigkeit so regulieren, daß in der Tat der Wasserstrahl die Gestalt einer der beiden Parabeln annimmt, je nachdem ob man die Mündung wagrecht bei a oder aber in der tangentialen Richtung bei b ansetzt. Die Ausflußgeschwindigkeit stellt naturlich zugleich die Wurfgeschwindigkeit der einzelnen, den Strahl zusammensetzenden Tropfen dar.

Die Beobachtung der Wurfbewegung zeigt so deutlich, daß ein Körper, dem eine bestimmte Geschwindigkeit in bestimmter Richtung erteilt ist, beim Fehlen von Bewegungshindernissen eine gleich-

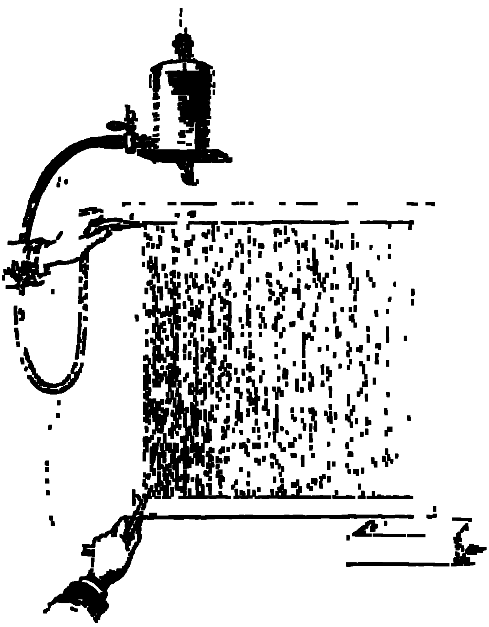


Fig. 19 Parabolische Bahnen.

förmige Bewegung mit jener Geschwindigkeit und in jener Richtung auch dann beibehält, wenn eine andere hinzukommende Ursache eine andere Bewegung hervorruft; die tatsächliche Bewegung setzt sich dann aus beiden zusammen.

Jeder einmal vorhandene Bewegungszustand erhält sich also nach Richtung und Geschwindigkeit, entweder selbständig oder zumindest als Komponente der weiteren Bewegung, wenn diese von irgendwelchen Ursachen beeinflußt wird; diese Eigentümlichkeit aller bewegten Körper wird als ihr Beharrungsvermögen bezeichnet. Die Selbsterhaltung einer unbeeinflußten gleichförmigen

Horizontalbewegung erscheint ebenso als Sonderfall des Beharrungsvermögens, wie die Tatsache, daß ein ruhender Körper in Ruhe verharrt, wenn keine äußeren Ursachen auf ihn einwirken.

Einfache Beobachtungen zeigen in der Tat, daß ein Körper, der sich infolge einer äußeren Einwirkung ungleichförmig oder auch nur krummlinig bewegt, sogleich in geradlinige gleichformige Bewegung übergeht, wenn jene Ursachen zu wirken aufhören. Wenn wir etwa einen schweren Gegenstand an einer Schnur befestigen und, indem wir deren anderes Ende in der Hand festhalten, im Kreise herumschwingen, so fliegt der Gegenstand in tangentialer Richtung fort, sobald wir die Schnur loslassen. Besonders deutlich zeigt sich der Übergang aus der ungleichförmigen in die gleichförmige Bewegung bei der sogenannten *Atwoodschen Fallmaschine*. Bei diesem Apparat, der in einem späteren Kapitel eingehend besprochen werden soll, ist über eine um ihre Achse drehbare Rolle ein Faden gelegt, der an beiden Enden zwei gleiche Gewichte P, an einem überdies aber ein kleines *Übergewicht* p trägt, das so geformt ist, daß es während des Niedergehens mittels einer geeigneten Vorrichtung aufgefangen werden kann (Fig. 20). Die messenden Beobachtungen, die, wie später gezeigt werden wird, sehr genau durchführbar sind, zeigen nun in der Tat, daß die Bewegung, mit mäßiger konstanter Beschleunigung erfolgt, daß aber von dem Augenblicke an, da das Gewicht abgehoben wird, die Beschleunigung wegfällt und die Geschwindigkeit konstant bleibt.

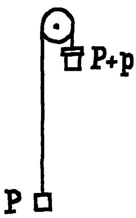


Fig. 20.

Aus dem Beharrungsvermögen erklärt es sich auch, daß ein in einem fahrenden Eisenbahnzug von einer Stelle A niederfallender Körper einem mitfahrenden Beobachter genau vertikal zu fallen scheint. Er langt an einer Stelle des Bodens an, die, wofern der Zug steht, auch einem außerhalb befindlichen Beobachter genau unterhalb der Stelle A zu liegen scheint. Denn bis zu dem Beginn der Fallbewegung nahm der Körper an der Bewegung des Zuges teil, und infolge seines Beharrungsvermögens behält er diese Bewegung als *Komponente* auch während des Falles bei. Infolgedessen legt der Körper in der Zeit des Niederfallens in wagrechter Richtung eine Distanz zurück, die ebenso groß ist wie diejenige, um die sich in derselben Zeit der Zug vorwärtsbewegt.

§ 21. Das Gewicht.

Infolge des Beharrungsvermögens müssen wir eine besondere *Ursache* für einen Übergang aus dem Zustand der Ruhe in den der

Bewegung, aber auch für jede Abweichung von der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung annehmen. Da nun ein jeder Körper, dem man seine Unterlage entzieht oder den man aus einer Aufhängevorrichtung loslöst, eine vertikale Abwartsbewegung und noch dazu mit konstanter Beschleunigung einschlägt, so müssen wir auch für diese allgemeine Eigenschaft eine besondere Ursache annehmen, die wir als *Schwere* oder als *Gewicht* der fallenden Körper bezeichnen.

Es ist nun eine einfache Erfahrungstatsache, daß man bereits mittels einer primitiven Wägevorrichtung Gewichte miteinander *vergleichen* kann. Dazu genügt ein in der Mitte aufgehängter gleichmäßiger Balken, an dessen beiden Enden mittels gleich langer Schnüre zwei gleich beschaffene Wagschalen befestigt sind. Als den schwereren von zwei gleichzeitig auf die Wage gebrachten Körpern bezeichnet man dann denjenigen, dessen Wagschale tiefer sinkt; andererseits schreibt man zwei Korpern *gleiches Gewicht* zu, wenn die mit ihnen belasteten Wagschalen in gleicher Höhe bleiben.

Indem man die selbstverstandliche Annahme macht, daß Korper von gleicher stofflicher Beschaffenheit und gleichem Volumen gleich viel wiegen, kann man leicht Gewichte konstruieren, die bestimmte Bruchteile oder Vielfache eines als Einheit gewählten Gewichtes darstellen, und mittels derart geschaffener Gewichtssätze kann man nun das Gewicht beliebiger Körper in bezug auf jenes Einheitsgewicht feststellen.

Als *technische Einheit* des Gewichtes gilt das *Kilogrammgewicht*, das in praktischer Hinsicht mit dem Gewicht eines Kubikdezimeters Wasser von 4° C identifiziert werden kann. Von der exakteren Definition dieser Größe wird in einem späteren Abschnitt noch eingehender die Rede sein.

§ 22. Die Kraft.

Jede *Ursache*, die einen Körper aus dem Zustand der Ruhe in den der Bewegung überzuführen vermag, wird als eine *Kraft* bezeichnet, wobei aber natürlich sorgfaltig zwischen wirksamen und bloß auslösenden Ursachen unterschieden werden muß. Als Kraft in diesem Sinne ist nicht nur das Gewicht eines Körpers anzusehen, sei es, daß es diesen Körper selbst oder wie etwa bei der *Atwood*schen Fallmaschine einen anderen Körper in Bewegung setzt. Auch eine *gespannte Feder* oder ein gedehntes *elastisches Band* übt eine Kraft in diesem Sinne aus. Als Kraft ist ferner die Anziehung oder Abstoßung zwischen *elektrisch* geladenen Körpern

oder Magnetpolen oder zwischen einem elektrischen Strom und einem Magneten oder zwischen zwei elektrischen Strömen anzusehen.

Es ist nun eine wichtige Erfahrungstatsache, daß wir bei Versuchen die Wirkung einer Kraft immer kompensieren können durch einen in bestimmter Richtung (etwa mittels einer Rolle) ausgeübten Zug eines Gewichtes.

Infolgedessen können wir jede Kraft als Vektorgröße auffassen. Die Richtung ist entgegengesetzt der des aufhebenden Zuges anzunehmen, während der Betrag dem Betrage des Gewichtes gleich zu setzen ist. Als praktische Einheit der Kraft kann somit ebenfalls das Kilogramm verwendet werden.

§ 23. Das Gleichgewicht der Kräfte.

Greifen an einem Massenpunkt gleichzeitig mehrere Kräfte an, so sagen wir, daß sich diese Kräfte untereinander im Gleichgewicht befinden, wenn sie sich in ihren Wirkungen wechselseitig aufheben, wenn also trotz des Vorhandenseins der Kräfte der angegriffene Massenpunkt in Ruhe bleibt.

Aus der Auffassung der Kraft als Vektorgröße folgt sogleich, daß dies dann der Fall sein muß, wenn die vektorielle Summe der Kräfte verschwindet. Zwei in einem Punkte angreifende Kräfte halten daher dann einander das Gleichgewicht, wenn sie bei gleichem Betrag entgegengesetzte Richtung haben.

Greifen in einem Punkte drei Kräfte an, von denen die erste nach Größe und Richtung (Fig. 21) durch die Strecke OA dargestellt ist und die zweite durch die Strecke AB, so wird die dritte Kraft dann im Gleichgewicht mit den beiden anderen sein, wenn die von dem Punkte B aus konstruierte gerichtete Strecke, die diese dritte Kraft repräsentiert, zu dem Punkte O zurückführt.

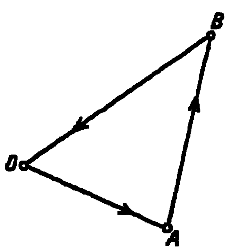


Fig. 21.

Dieses Prinzip können wir auch anders ausdrücken, indem wir ganz allgemein eine Kraft, die sich durch vektorielle Addition zweier Einzelkräfte ergibt, als die Resultierende aus jenen beiden Einzelkräften bezeichnen. Die Resultierende ist also, wie aus dem Begriff der vektoriellen Addition folgt, immer durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt, dessen Seiten die Einzelkräfte nach Betrag und Richtung repräsentieren. Dann kann man den früher angegebenen Satz auch in der Form aussprechen, daß drei in einem Punkte angreifende Kräfte einander dann das Gleichgewicht halten,

wenn eine von ihnen der Resultierenden aus den beiden anderen entgegengesetzt gleich ist. In Fig. 22 ist derart aus den in der früheren Fig. 21 dargestellten Kräften I und II die Resultierende konstruiert, der die Kraft III entgegengesetzt gleich ist.

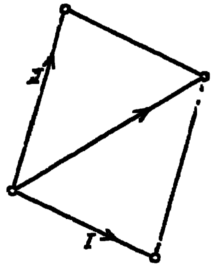
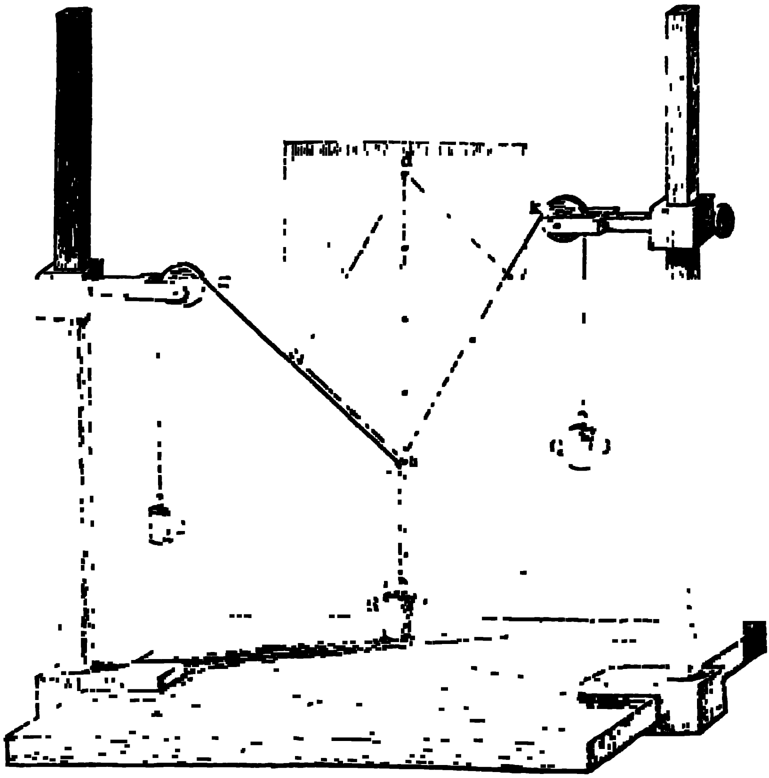


Fig. 22.

Der experimentelle Nachweis dieses sogenannten Satzes vom Kräfteparallelogramm läßt sich am einfachsten mittels eines Apparates von der Art der durch die Fig. 23 dargestellten Vorrichtung erbringen. Auf einer Tischplatte sind zwei vertikale Stäbe angeschraubt, längs deren zwei Hülsen verschiebbar sind. Jede der beiden Hülsen trägt wiederum eine drehbare Rolle, wobei der Apparat so zusammengestellt wird, daß die Vertikalebenen der beiden Rollen


Fig. 23. Das Kräfteparallelogramm.

zusammenfallen. Über die Rollen schlingt man nun eine Schnur, die an ihren beiden Enden zwei Gewichte, P und Q, trägt, und bringt

zwischen den beiden Rollen überdies ein drittes Gewicht R an. Man findet dann, daß sich Gleichgewicht einstellt, wenn die von den Rollen zu der Aufhängestelle des dritten Gewichtes führenden Fäden bestimmte Richtungen haben. Hinter diese Fäden ist ein Zeichenbrett gebracht. Konstruiert man auf diesem ein Parallelogramm, dessen Seiten die schiefen Fadenrichtungen haben und dessen Diagonale vertikal ist, so läßt sich leicht zeigen, daß sich die Längen der Parallelogrammseiten und der Diagonale untereinander so verhalten wie die Gewichte P, Q und R, womit der Satz vom Kräfteparallelogramm bewiesen erscheint. In Fig. 23 sind beispielsweise die Parallelogrammseiten ac und ab gleich zwei und drei Längeneinheiten gemacht, entsprechend dem Umstand, daß das Gewicht P 2 kg und das Gewicht Q 3 kg beträgt. Das dritte Gewicht R beträgt 4 kg, und in der Tat erweist sich eben auch die Diagonale ad gleich vier Längeneinheiten.

In Verallgemeinerung der Fig. 21 erhalten wir bei beliebig vielen, im Gleichgewicht befindlichen und an einem Punkt angreifenden Kräften die Konstruktion des sogenannten Kräftepolygons. Im Falle des Gleichgewichtes müssen sich die die Kräfte nach Größe und Richtung darstellenden Vektoren zu einem geschlossenen Polygon zusammensetzen lassen. Ist kein Gleichgewicht vorhanden, so ergibt sich wiederum die resultierende Kraft, indem man die Vektoren zu einem Streckenzug zusammensetzt und von dessen Anfang eine gerichtete Strecke zu dessen Endpunkt zieht (Fig. 24). Der Satz vom Kräfteparallelogramm stammt ebenso wie die Erkenntnis der vektoriellen Darstellbarkeit der Kräfte von dem holländischen Physiker Stevin (um 1600).

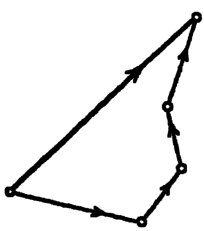


Fig. 24.

§ 24. Die Beziehungen zwischen Kraft und Beschleunigung.

Aus der Erkenntnis des Beharrungsvermögens der Körper folgt, daß die Wirkung einer Kraft auf eine Bewegung nicht in deren Erhaltung, sondern nur in der Änderung der Geschwindigkeit oder der Richtung bestehen kann, also, wie man in vektorieller Ausdrucksweise, beide Fälle zusammenfassend, sagen kann, in einer Änderung des Geschwindigkeitsvektors.

Von vornherein können wir wohl vermuten, daß eine konstante Kraft eine gleichmäßige Änderung des Geschwindigkeitsvektors zur Folge haben muß, also eine konstante Beschleunigung hervor-

ruft. In der Tat zeigt dies ja schon die Beobachtung des freien Falles, bei dem eine in praktischer Hinsicht als konstant anzusehende Kraft wirkt und wobei sich in der Tat die Bewegung als gleichförmig beschleunigt erweist. Die Konstanz der Beschleunigung nimmt man auch an der Atwoodschen Fallmaschine bei einer langsamen, durch ein kleines Übergewicht erzeugten Bewegung wahr.

Die Betrachtung der Wurfbewegung zeigt auch, daß die Beschleunigung ebenso wie die wirkende Schwerkraft immer vertikal nach abwärts gerichtet ist, so daß wir mittels einer sehr naheliegenden Verallgemeinerung daraus wohl schließen müssen, daß der Beschleunigungsvektor immer die Richtung des Kraftvektors hat.

Aus Beobachtungen an der Atwoodschen Fallmaschine können wir ferner auch leicht erkennen, wie sich bei einem und demselben Körper die Beschleunigung mit der Kraft ändert. Wir finden nämlich, daß ein doppelt so großes Übergewicht unter sonst gleichen Umständen die doppelte Beschleunigung hervorbringt. (Dies trifft allerdings nur näherungsweise zu, und zwar mit um so größerer Annäherung, je kleiner das Übergewicht im Verhältnis zu dem Gesamtgewicht der durch das Übergewicht bewegten Korper ist.) Später näher zu besprechende Versuche an der Fallmaschine zeigen auch, daß, wofern die Kraft veränderlich, also eine bestimmte Funktion der Zeit ist, sich in genau gleicher Weise, als gleiche Funktion der Zeit auch die Beschleunigung ändert, wie man durch Messung der zurückgelegten Wege feststellen kann.

Auch primitive Beobachtungen an der schiefen Ebene zeigen, daß sich die einem bestimmten Körper erteilten Beschleunigungen wie die wirksamen Kräfte verhalten. Befindet sich auf einer schiefen Ebene von dem Neigungswinkel α ein Körper vom Gewicht Q, so ist, wie die experimentelle Beobachtung zeigt, der über eine Rolle wirkende Zug eines Gewichtes $Q \sin \alpha$ eben genügend, um (bei völlig glatter Unterlage) eine Abwärtsbewegung des Korpers zu verhindern (Fig. 25). In der Tat läßt sich ja das einen vertikalen Vektor darstellende Gewicht in zwei zueinander senkrechte Komponenten von den Größen $Q \cos \alpha$ und $Q \sin \alpha$ zerlegen, wobei aber die erste Komponente durch die Unterlage aufgehoben wird (Fig. 26). Die Beobachtungen an der schiefen Ebene zeigen aber andererseits, daß bei einem Neigungswinkel α auch die Beschleunigung gleich ist der des freien Falles, noch multipliziert mit $\sin \alpha$ (wie dies schon in § 19 ausgeführt wurde). Wir werden so zu der allgemeinen Erkenntnis geführt, daß die einem bestimmten Körper durch eine Kraft erteilte

Beschleunigung der Größe der einwirkenden Kraft proportional ist.

Eine weitere fundamentale Frage ist aber nun die, wie sich Beschleunigungen, die verschiedenen Körpern durch dieselbe

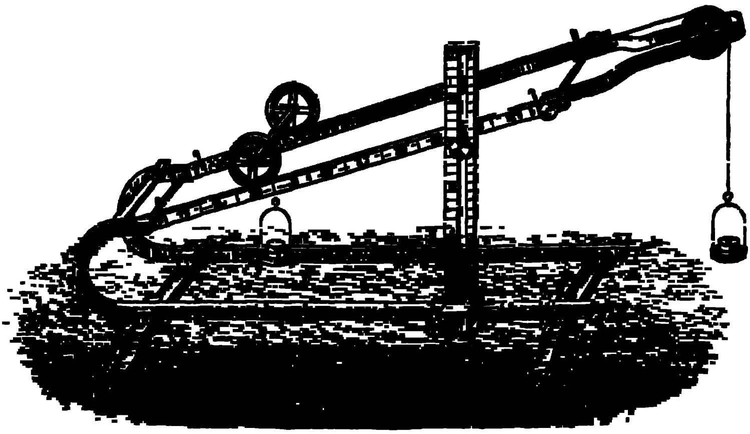


Fig. 25. Schiefe Ebene.

Kraft erteilt werden, untereinander verhalten. Beobachtungen an der Fallmaschine zeigen, daß dasselbe kleine Übergewicht nur eine halb so große Beschleunigung hervorbringt, wenn das Gewicht der durch das Übergewicht bewegten Körper verdoppelt wird. In Verbindung mit dem vorhin gewonnenen Theorem ergibt sich somit der Satz, daß die Beschleunigung eines Körpers der einwirkenden Kraft direkt, dem Gewichte des Körpers aber umgekehrt proportional ist.

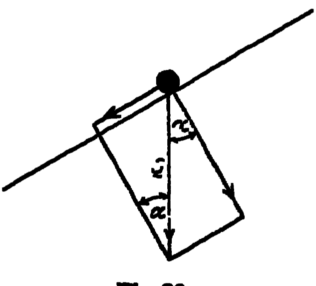


Fig. 26.

Zu derselben Erkenntnis führt uns auch eine einfache Überlegung, die an die wesentlichen Versuchsergebnisse anknüpft, die Galilei bei der Untersuchung der Bewegung auf der schiefen Ebene gewann. Wir

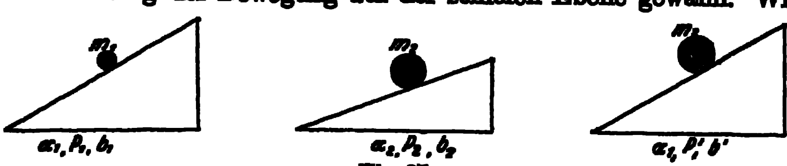


Fig. 27.

betrachten (Fig. 27) ein Gewicht Q_1 auf einer schiefen Ebene von dem Neigungswinkel α_1; die wirksame Kraft sei in diesem Falle

P_1 (= $Q_1 \sin \alpha_1$) und die Beschleunigung b_1. Andererseits betrachten wir ein Gewicht Q_2 auf einer zweiten schiefen Ebene, deren Neigungswinkel α_2 sei; die wirksame Kraft sei dabei P_2 (= $Q_2 \sin \alpha_2$) und die Beschleunigung b_2. Zur Vereinfachung unserer Überlegung denken wir uns überdies noch eine dritte schiefe Ebene vom Neigungswinkel α_1 und auf ihr ein Gewicht Q_2; die in diesem Falle wirksame Kraft nennen wir P' (= $Q_2 \sin \alpha_1$) und die hierbei auftretende Beschleunigung b'.

Vergleichen wir nun die dritte Figur mit der ersten, so ergibt sich aus Galileis Erkenntnis des gleich raschen Falles aller Körper auf derselben Ebene, daß

$$b' = b_1 \tag{32}$$

sein muß. Ferner besteht, da die wirksame Kraft immer gleich ist dem Produkt aus Gewicht und Sinus des Neigungswinkels, die Proportion

$$P' \, P_1 = Q_2 \, . \, Q_1 \, , \tag{33}$$

wofür wir auch schreiben konnen

$$P' = \frac{P_1 Q_2}{Q_1} \, . \tag{34}$$

Andererseits liefert ein Vergleich der dritten Figur mit der zweiten (da ja die Beschleunigungen auf verschieden geneigten Ebenen sich wie die Sinus der Neigungswinkel verhalten) die Beziehung

$$b' : b_2 = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 \, . \tag{35}$$

Da P' gleich ist $Q_2 \sin \alpha_1$ und P_2 gleich $Q_2 \sin \alpha_2$, so besteht weiterhin die Proportion

$$P' : P_2 = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 \, . \tag{36}$$

Aus den Gleichungen 35 und 36 folgt somit

$$P' : b' = P_2 : b_2 \, . \tag{37}$$

Setzen wir aber nun für P' und b' ihre Werte aus den Gleichungen 32 und 34 ein, so erhalten wir in der Tat die Proportion

$$b_1 \; b_2 = \frac{P_1}{Q_1} : \frac{P_2}{Q_2} \, . \tag{38}$$

§ 25. Die Superposition der Kraftwirkungen.

Wenn auf einen Massenpunkt gleichzeitig mehrere Kräfte wirken, so können wir wohl vermuten, daß sich der Massenpunkt so verhalten wird, als ob auf ihn nur eine einzige Kraft wirken würde, die so beschaffen ist, daß sie im Gleichgewichtsfalle die Gesamtheit der wirkenden Kräfte zu ersetzen vermöchte. Die tatsächliche Beschleunigung würde sich danach nach Betrag und

Richtung so ergeben, als ob an dem Massenpunkt nur die Resultierende aus allen tatsächlich vorhandenen Kräften angreifen würde, wie sie sich aus diesen durch vektorielle Addition ergibt.

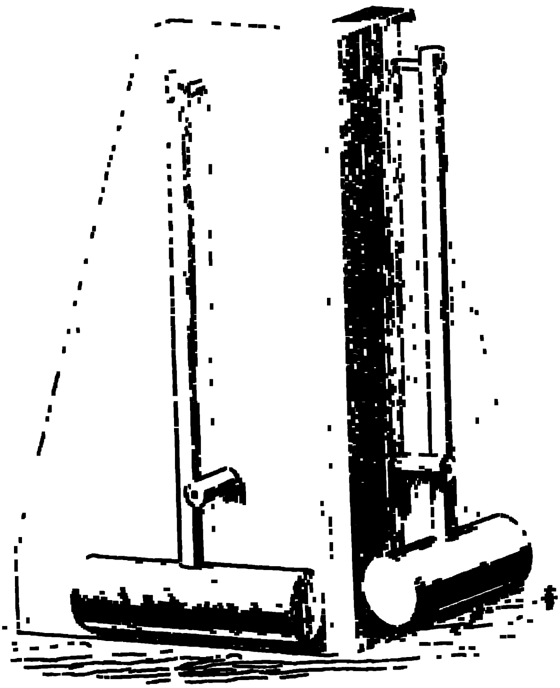


Fig. 28

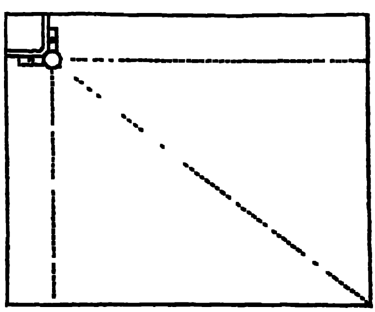


Fig. 29.

Fig. 28 und 29. Superposition von Kraftwirkungen.

Daß dies in der Tat der Fall ist, daß sich also die durch die Beschleunigungen ausgedrückten Wirkungen der einzelnen Kräfte einfach superponieren, indem jede Kraft unabhängig von der

anderen als Komponente der Gesamtwirkung zur Geltung kommt, läßt sich in einem speziellen Fall durch ein einfaches Experiment veranschaulichen.

Man bedient sich dazu eines von Weinhold ersonnenen Apparates, der in Fig. 28 in perspektivischer Ansicht, in Fig. 29 im Grundriß abgebildet ist. An die beiden Hämmer, die durch Kautschukpuffer (P) am Zusammenschlagen verhindert werden, wird eine Elfenbeinkugel angelegt. Läßt man bloß einen der beiden Hämmer fallen, so gerät die Kugel in der Richtung in Bewegung, in der der Hammer anschlägt. Läßt man aber beide Hämmer gleichzeitig niederfallen, nachdem beide gleich hoch gehoben wurden, so erteilen beide der Elfenbeinkugel die gleiche Geschwindigkeit, und die Kugel bewegt sich dann in der Tat in der Richtung der Winkelsymmetralen.

§ 26. Die Masse.

In den bisherigen Überlegungen wurden die Körper, deren Beschleunigung unter dem Einfluß gegebener Kräfte betrachtet wurde, durch ihr Gewicht charakterisiert. Nun ist es aber von vorneherein unwahrscheinlich, daß das Gewicht eines Körpers eine ihm überall unverändert anhaftende Eigenschaft darstelle. In der Tat zeigen genauere Untersuchungen, daß die Beschleunigung des freien Falls in verschiedenen geographischen Breiten und in verschiedenen Höhen verschieden ist. Wenn wir aber von der Vorstellung ausgehen, daß eine einem Körper erteilte Beschleunigung der einwirkenden Kraft proportional sei, dann muß offenbar das Gewicht eines Körpers mit dem Orte variieren — ganz abgesehen davon, daß vollends für Betrachtungen der Himmelsmechanik das irdische Gewicht bedeutungslos werden muß.

Wir werden so zu der Vorstellung geführt, daß jedem Korper eine fur ihn charakteristische individuelle Konstante zukommen muß, durch die dividiert, eine einwirkende Kraft die erteilte Beschleunigung ergibt; diese individuelle Konstante wird als die Masse des Körpers bezeichnet.

Innerhalb eines nicht allzugroß gewählten Bereiches verhalten sich die Massen natürlich wie die Gewichte, so daß innerhalb des Bereiches ein Vergleich der Massen durch Vergleichung der zugehorigen Gewichte (mittels einer Wage) möglich ist. Da sich aber andererseits die Masse eines geaichten Gewichtes selbstverständlich nicht ändert, wenn es von einem Orte zu einem ganz anderen gebracht wird, so können mittels der üblichen Gewichtsstücke Massen, in welchen Gegenden der Erde immer, in bezug auf eine Standard-

masse gemessen werden. Als solche gilt die Masse des in Sèvres bei Paris aufbewahrten Kilogrammgewichtsstückes aus Platin-Iridium, welche Masse man möglichst genau derjenigen Masse anzugleichen bemüht war, die einem Kubikdezimeter Wasser bei 4° C und normalem Luftdruck zukommt. Der tausendste Teil dieser Standardmasse wird als die Masse eines Gramms oder als Gramm schlechthin bezeichnet. Das Kilogrammgewicht wird aber in exakter Weise definiert als das Gewicht, das dem erwähnten Platin-Iridiumstück in der geographischen Breite von 45° und in dem Niveau des Meeresspiegels zukommt. Um Gewichte an verschiedenen Stellen der Erde exakt miteinander vergleichen zu können, muß also für die betreffenden Stellen der genaue Wert der Fallbeschleunigung bekannt sein.

Während das Gewicht den Widerstand bestimmt, den ein Körper seiner Hebung entgegensetzt, ist durch die Masse der Widerstand bestimmt, der überwunden werden muß, damit ein Körper in Bewegung gesetzt oder in einer vorhandenen Bewegung gehemmt wird. Die verschiedene Bedeutung des Gewichtes und der Masse offenbart sich deutlich in solchen Fällen, in denen der erste Widerstand kompensiert wird; die Erfahrung zeigt, daß in solchen Fällen der zweite Widerstand dennoch unvermindert fühlbar bleibt.

Dies ist beispielsweise bei einem Schwungrad der Fall, das auf eine möglichst glatte, zylindrische Achse aufgesetzt und gut äquilibriert wird; sein Gewicht äußert dann uberhaupt keinen Einfluß auf seine Lage; aber während es in jeder beliebigen Stellung in Ruhe bleibt, muß ein sehr großer Widerstand überwunden werden, wenn das Schwungrad in Bewegung versetzt oder, falls es bewegt ist, aufgehalten werden soll. Ähnlich verhält sich ein aufgehängtes Pendel oder ein Körper, der durch einen Luftballon getragen wird und eben trotz seiner scheinbaren Gewichtslosigkeit jedem Versuche einer Bewegungsänderung einen merklichen Widerstand entgegensetzt*).

§ 27. Die Gegenwirkung.

Die bisher besprochenen Erfahrungstatsachen reichen im wesentlichen für die Gewinnung der Gesetze aus, die die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einfluß gegebener Kräfte bestimmen. Wollen wir aber die Bewegung eines Systems von Massenpunkten betrachten, zwischen denen irgendwelche Kräfte wirken, so müssen wir noch eine weitere fundamentale Erfahrungs-

---

*) Vgl. hierzu und zur Kritik des Massenbegriffs Ernst Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung.

tatsache verwerten; es ist dies die sich an zahllosen Beispielen des alltäglichen Lebens offenbarende Beziehung, daß jeder Wirkung eines Körpers auf einen anderen eine gleich große Gegenwirkung entspricht, die seitens des zweiten Körpers auf den ersten ausgeübt wird.

Daß ein Faden, an dem ein Gewicht angehängt ist, gespannt ist, so daß er bei zu starker Belastung sogar entzweireißt, muß offenbar darin seinen Grund haben, daß an beiden Enden des Fadens gleich große, aber entgegengesetzte Kräfte wirken. Ein jeder schwerer Körper wird ebenso von seiner Unterlage gedrückt, wie er diese drückt. Innerhalb der Erde gravitiert jedes einzelne Teilchen gegen jedes andere; denken wir uns aber nun die Erdkugel durch eine beliebige Fläche in zwei Teile zerlegt, so müßte sie unbedingt in Bewegung geraten, wenn nicht zu beiden Seiten der Fläche der Druck genau gleich ist; das ist aber wieder nur möglich, wenn je zwei Teilchen stets mit gleichen, aber entgegengesetzten Kräften aufeinander wirken.

Drittes Kapitel.

Die allgemeinen Prinzipe der Dynamik.

§ 28. Die Newtonschen Bewegungsgesetze.

Während sich alle Beziehungen der Kinematik ohne Zuhilfenahme irgendwelcher Erfahrungstatsachen ableiten lassen, ist nur auf empirischer Grundlage die Entwicklung des Wissenszweiges möglich, der die Bewegungen im Zusammenhange mit den sie beeinflussenden Ursachen untersucht und der als Dynamik bezeichnet wird. Die exakte Formulierung der fundamentalen Prinzipe der Dynamik verdanken wir Newton, der (1687) als die allgemeinsten Bewegungsgesetze die folgenden drei sogenannten Axiome aufstellte:

I. Jeder Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wofern er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, jenen Zustand zu ändern (Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare).

II. Die Änderung der Bewegung ist proportional der einwirkenden bewegenden Kraft und erfolgt in der Richtung der Geraden, in der jene Kraft wirkt (Lex II: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur).

Nach dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetz ist der Kraftvektor gleich dem zeitlichen Differentialquotienten des Impulsvektors. Die Änderung der Bewegungsgröße ist daher in jedem beliebigen Zeitelement gleich dem Produkt aus diesem Zeitelement und der Kraft; dieses Produkt wird als Antrieb bezeichnet.

§ 31. Arbeit und lebendige Kraft.

Bewegt sich ein Massenpunkt in der Richtung einer konstanten Kraft, so wird das Produkt aus dem Betrag der Kraft und einem bestimmten Wegstück als die auf diesem Wege verrichtete Arbeit bezeichnet. Ist die Kraft veränderlich, so können wir nur von der Arbeit sprechen, die längs eines Wegelementes verrichtet wird. Fallen schließlich, um den allgemeinsten Fall zu betrachten, die Richtungen der Kraft und des Weges nicht zusammen, so definiert man unter Benutzung eines Begriffs der Vektorrechnung die Arbeit als das innere oder skalare Produkt der Vektoren der Kraft und des Wegelementes, das ja natürlich eine gerichtete Strecke darstellt. Wir verstehen dabei unter dem inneren Produkt zweier Vektoren diejenige Größe, die sich ergibt, wenn man den Betrag des einen Vektors multipliziert mit der Projektion des anderen Vektors auf die Richtung des ersten. Es ist also das innere Produkt, das (im Gegensatz zu dem früher besprochenen äußeren Produkt) selbst keinen Vektor darstellt, gegeben durch das Produkt aus den Beträgen der beiden Vektoren und dem Kosinus des Winkels, den ihre Richtungen miteinander einschließen. Daher ist auch die Arbeit, die längs des Wegelementes ds verrichtet wird und die mit dA bezeichnet werde, gleich

$$dA = K\,ds\cos\varphi, \tag{43}$$

wenn K der Betrag der Kraft und φ der Winkel ist, den die Kraftrichtung mit der Bewegungsrichtung einschließt (Fig. 30). Je nachdem, ob dieser Winkel φ spitz oder stumpf ist, wird von geleisteter oder verbrauchter Arbeit gesprochen.

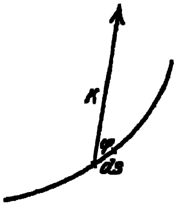


Fig. 30.

Aus dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetz folgt mittels elementarer Beziehungen der Differentialrechnung, daß die längs eines Wegelementes verrichtete Arbeit gleich ist der Änderung, die das als lebendige Kraft bezeichnete halbe Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat während der Zurücklegung des Wegelementes erfährt. Je nachdem, ob Arbeit geleistet oder verbraucht wird, wird die lebendige Kraft vermehrt

oder vermindert. Der Begriff der lebendigen Kraft stammt von Leibniz*) (1686); Leibniz hat allerdings unter dieser Größe das ganze Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat verstanden, und erst Coriolis hat 1829 noch den Faktor $\frac{1}{2}$ hinzugefügt.

§ 32. Die Arbeitseinheit.

Da eine Arbeit als Produkt aus einer Kraft und einem Weg darstellbar ist, so ergibt sich eine absolute Arbeitseinheit, indem man eine Dyne mit einem Zentimeter multipliziert. Diese Einheit der Arbeit, die durch eine Kraft von einer Dyne in ihrer Richtung längs eines Zentimeters verrichtet wird, wird als ein Erg bezeichnet; es ist also

$$1 \text{ Erg} = 1 \text{ Dyne} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-2}. \qquad (44)$$

Zu einer vor allem in der Technik gebrauchten praktischen Arbeitseinheit gelangt man, indem man die technische Krafteinheit, das Kilogrammgewicht, benutzt. Die Arbeit, die verrichtet werden muß, um dieses Gewicht einen Meter hoch zu heben, wird als Kilogrammeter bezeichnet. Aus Gl. 41 folgt

$$1 \text{ kg m} = 9{,}806 \cdot 10^7 \text{ Erg}. \qquad (45)$$

Bei konstanter Arbeitsverrichtung wird die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit als Effekt oder Leistung bezeichnet. Die absolute Einheit des Effektes ist also das Erg pro Sekunde; als technische Einheit gilt hingegen die sogenannte Pferdestärke; sie ist definiert als der Effekt, bei dem in einer Sekunde eine Arbeit von 75 Kilogrammetern verrichtet wird**). Es ist also

$$1 \text{ Pferdestärke} = 7{,}355 \cdot 10^9 \text{ Erg sec}. \qquad (46)$$

Neben den bisher erwähnten Einheiten der Arbeit und des Effektes werden noch mehrere andere in verschiedenen Zweigen der Physik benutzt. So wird als Literatmosphäre die Arbeit definiert, die der Vermehrung des Volumens eines Gases um 1 Liter unter dem konstanten Druck von einer Atmosphäre entspricht. Wie hier nur nebenbei bemerkt sei, ist

$$1 \text{ Liter-Atmosphäre} = 1{,}0133 \cdot 10^9 \text{ Erg}. \qquad (47)$$

Auch die Wärmemenge, die erforderlich ist, um 1 Gramm Wasser bei

---

*) Leibnizens diesbezügliche Abhandlung trägt den Titel: „Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii“; sie erschien 1686 in den „Acta erud. Lips.“ und ist in den Gesammelten Werken (ed. Gerhardt) in Bd. 6 der dritten Folge enthalten.

**) Die Abkürzung ist PS oder HP (nach dem englischen Wort „Horse-Power“).

15° C um ein Grad zu erwärmen und die als häufig benutzte Einheit Kalorie genannt wird, stellt eine Arbeit dar. Es ist

$$1 \text{ Kalorie} = 4{,}186 \cdot 10^7 \text{ Erg}. \tag{48}$$

In der Elektrotechnik dient als Einheit des Effektes das sogenannte Watt; ein Effekt von dieser Größe wird, wie hier nur nebenbei bemerkt sei, von einem Strome von 1 Ampère bei einem Widerstande von 1 Ohm vollbracht. Es ist*)

$$1 \text{ Watt} = 1{,}0005 \cdot 10^7 \text{ Erg/sec}. \tag{49}$$

§ 33. Das Potential.

Der physikalische Begriff der Arbeit steht, wie einfache theoretische Überlegungen zeigen, in einem engen Zusammenhang mit einem wichtigen Begriff der Vektoranalysis; dieser Begriff, zu dem eine rein mathematische Deduktion führt, ist der des Gradienten eines Feldes. Unter einem Felde versteht man ein Gebiet, innerhalb dessen jedem Punkte ein bestimmter, von Stelle zu Stelle im allgemeinen in stetiger Weise veränderlicher Wert einer Große zugeordnet werden kann; die Größe können wir als die Feldgröße bezeichnen. Wir konnen beispielsweise für eine gegebene Zeit die Erdoberfläche als Temperaturfeld oder als Feld des Luftdrucks auffassen. Karten, die derart für eine gegebene Stunde die Temperatur- oder Luftdruckverteilung darstellen, sind ja allgemein bekannt, ebenso die Kurven, die in solchen Karten als Isothermen oder Isobaren die Stellen gleicher Temperatur oder gleichen Luftdrucks untereinander verbinden. Allgemein bezeichnen wir derartige Kurven, die Punkte gleicher Feldgröße miteinander verbinden, als Niveaulinien; in einem räumlichen Felde entsprechen ihnen sogenannte Niveauflächen. Sie sind die „geometrischen Orte" der Punkte gleicher Feldgröße.

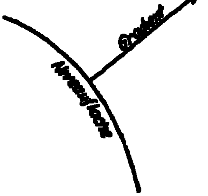


Fig. 31.

Jedem Punkte eines Feldes kann man nun einen als Gradienten bezeichneten Vektor folgendermaßen zuordnen. Man legt durch den Punkt eine Niveaufläche und errichtet senkrecht zu ihr eine durch den Punkt gehende Gerade; ihr gibt man den Richtungssinn, in dem die Feldgroße zunimmt (Fig. 31). Ist durch diese Festsetzung die Richtung des Gradienten bestimmt, so definieren wir

*) Die geringfügige Verschiedenheit zwischen einem Watt und zehn Millionen Erg/sec erklärt sich daraus, daß die Lichtgeschwindigkeit ein klein wenig von dem in dem elektrotechnischen Maßsystem benutzten Zahlenfaktor $3 \cdot 10^{10}$ abweicht.

den Betrag des Gradienten als die auf die Längeneinheit bezogene Zunahme der Vektorgröße in dieser Richtung.

Eine merkwürdige Eigenschaft kommt nun, wie rein mathematische Deduktionen zeigen, dem Linienintegral des Gradienten zu. Man versteht darunter die Große, die sich ergibt, wenn man in dem Felde eine beliebige Kurve zieht, fur jedes Kurvenelement das innere Vektorprodukt aus dem Kurvenelement und dem Gradienten für jene Stelle bildet und diese inneren Vektorprodukte dann uber die zwischen zwei Punkten A und B gezogene Kurve summiert. Es ergibt sich dann durch rein mathematische Beweisführung, daß der Wert des Linienintegrals des Gradienten einzig und allein von dem Niveauunterschied der beiden Punkte abhängt, nämlich von der Differenz der Werte, die der mit dem Orte variablen Feldgröße in den Punkten A und B zukommen. Von der Gestalt und von der Länge der zwischen den beiden Punkten gezogenen Kurve ist hingegen das Linienintegral des Gradienten unabhangig; es ergibt sich stets in demselben Betrage, wie immer man zwischen den Punkten A und B die Kurve zieht (Fig. 32).

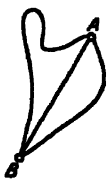


Fig. 32.

Nach der Definition der Arbeit ist nun die langs einer Wegkurve verrichtete Arbeit nichts anderes als das Linienintegral des Kraftvektors längs der Wegkurve. Die vorhin erwahnten einfachen Beziehungen mussen daher dann gelten, wenn die Kraft als Gradient eines Feldes aufgefaßt werden kann. Ist dies der Fall, so bezeichnet man die zugehörige Feldgroße als Potential der Kraft oder als mechanisches Potential.

Eine Kraft besitzt, wie sich leicht zeigen läßt, immer dann ein Potential, wenn sie nach einem bestimmten Punkte gerichtet ist und nur von der Entfernung von diesem Punkte abhängt. In diesem Falle gilt für die Arbeit die Unabhängigkeit von der Wegform und Weglänge, und dasselbe gilt natürlich dann auch fur die auf dem Wege gewonnene lebendige Kraft. Zu den Kraften, die die früher angegebene Eigenschaft haben, gehört jedesfalls auch die irdische Schwerkraft; die Niveauflächen ihres Potentials sind horizontale Ebenen, und bei beliebigen Bewegungen im irdischen Schwerefeld hängt somit der Gewinn an lebendiger Kraft nur von dem durchlaufenen Höhenunterschied ab.

Ist ein Potential vorhanden, so muß, wie leicht gezeigt werden kann, während der Bewegung die Summe aus der lebendigen Kraft und dem Potential, das dem jeweiligen Aufenthaltsorte zukommt,

ungeändert bleiben. Es muß die Summe aus der lebendigen Kraft und dem mechanischen Potential eine von Ort und Zeit unabhängige Konstante darstellen; sie wird als die mechanische Energie des bewegten Massenpunktes bezeichnet, und deshalb wird die lebendige Kraft auch kinetische Energie genannt*).

§ 34. Der Drehimpuls.

Wie sich der Impuls durch Multiplikation der Masse mit der Geschwindigkeit ergibt, so wird als der auf einen bestimmten Punkt bezogene Drehimpuls der Vektor definiert, der sich ergibt, wenn die doppelte Flächengeschwindigkeit (s. § 10) noch mit der Masse multipliziert wird. Für den Spezialfall einer gleichförmigen Kreisbewegung wird somit der Drehimpuls gleich dem Produkt aus Masse, Radius und Bahngeschwindigkeit.

Bereits Newton selbst hat aus seinem zweiten Bewegungsgesetz den wichtigen Satz abgeleitet, daß die Bewegung eines Körpers, auf den eine stets nach demselben Punkt gerichtete Kraft wirkt, in einer und derselben Ebene beharrt und ihre Flächengeschwindigkeit in bezug auf jenen Punkt nicht ändert. Umgekehrt kann naturlich, wenn die auf einen bestimmten Punkt bezogene Flächengeschwindigkeit konstant ist und die Bewegung in einer Ebene verharrt, daraus stets geschlossen werden, daß die Kraft nach diesem Punkte gerichtet ist.

§ 35. Die Zusatzkräfte der Relativbewegung.

Da sich bei der Relativbewegung die tatsächliche Beschleunigung vektoriell aus der Relativ-, der Führungs- und der Coriolis-Beschleunigung zusammensetzt, so können wir für die Relativbewegung nur dann das zweite Newtonsche Bewegungsgesetz aufrecht erhalten, also das Produkt aus Masse und Relativbeschleunigung der „Kraft" gleich setzen, wenn wir noch zwei fingierte Zusatzkräfte hinzufügen, die der Führungs- und Coriolis-Beschleunigung entgegengesetzt sind und die sich in ihren Beträgen durch Multiplikation dieser beiden Beschleunigungen mit der Masse ergeben. Diese Zusatzkräfte werden als Führungskraft und als Coriolis-Kraft bezeichnet.

Da die Coriolis-Kraft der Coriolis-Beschleunigung entgegengesetzt ist, muß sie nach dem am Schlusse von § 17 Gesagten einen

---

*) Der Begriff des Potentials geht auf Euler, Lagrange und Laplace zurück. Die Bezeichnung „Energie" wurde von Rankine (1853) in die Physik eingeführt.

solchen Richtungssinn haben, wie er durch Fig. 33 dargestellt ist; dann erscheint nämlich die Drehung im Sinne des Uhrzeigers, die auf kürzestem Wege den Vektor der Winkelgeschwindigkeit in die Richtung des Vektors der Relativgeschwindigkeit überführt.

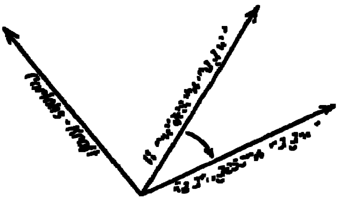


Fig. 33.

Die **Führungskraft**, die der Führungsbeschleunigung entgegengesetzt ist, muß im Falle einer gleichmäßigen Rotation des Bezugssystems **von der Rotationsachse weg** gerichtet sein. Für ihren Betrag ergibt sich aus der früheren Gl. 30 der Wert

$$K_f = m p w^2, \tag{50}$$

wenn m die Masse, p das auf die Rotationsachse gefällte Lot und w die Winkelgeschwindigkeit bedeutet.

§ 36. Die Inertialsysteme.

Es gibt nur einen einzigen Fall der Relativbewegung, in dem der Übergang von dem einen Bezugssystem zu dem anderen keine Einführung von Zusatzkräften erfordert. Dies ist der Fall der **gleichförmigen Translation**, für welchen Fall in beiden Systemen die Beschleunigungen gleich sind. Die Erkenntnis, daß in bezug auf zwei gegeneinander gleichförmig fortschreitende Systeme gleiche Kräfte die gleichen Wirkungen hervorbringen, wird als **mechanisches Relativitätsprinzip** bezeichnet.

Andererseits folgt aus dem mechanischen Relativitätsprinzip, daß es eine ausgezeichnete Klasse von Koordinatensystemen zu geben scheint, die alle gegeneinander in gleichförmiger Translation begriffen sind und die eben dadurch eine Sonderstellung einnehmen, daß für sie die **Zusatzkräfte verschwinden**. Nur in bezug auf solche Koordinatensysteme behält ein Massenpunkt, der sich ohne jede Einwirkung irgendwelcher Kräfte bloß unter dem Einflusse seiner Trägheit bewegt, seinen Geschwindigkeitsbetrag und seine Bewegungsrichtung unverändert bei. Darum werden diese ausgezeichneten Bezugssysteme als **Inertialsysteme***) oder auch als **mechanische Fundamentalsysteme** bezeichnet.

Wie die Erfahrung zeigt, erscheint ein derartiges Inertialsystem durch den **Fixsternhimmel** festgelegt, und mit genügender Annäherung kann als Inertialsystem ein Koordinatensystem angesehen werden, dessen Ursprung mit dem Erdmittelpunkt und dessen eine

*) „Inertia“ ist der lateinische Ausdruck für Trägheit.

Achse mit der Erdachse zusammenfällt und gegen das sich die Erde mit einer Winkelgeschwindigkeit von 360° in 24 Stunden dreht.

§ 37. Die unfreie Bewegung.

Wenn ein bewegter Massenpunkt infolge einer Beschränkung seiner Bewegungsfreiheit daran verhindert ist, eine bestimmte Kurve oder eine bestimmte Fläche zu verlassen, so muß sich im allgemeinen sein Beharrungsbestreben in einer von ihm ausgeübten Zug- oder Druckkraft äußern.

Am einfachsten erkennen wir dies, indem wir uns einen dem Einfluß von Kräften entzogenen und ohne Bewegungshindernisse bewegten kleinen Körper in eine dünnwandige Röhre eingeschlossen denken, in der er eben Platz hat; wir können etwa auch an eine Kugel denken, die man in eine ganz glatte Rinne rollen läßt, die in eine horizontale Platte eingegraben ist und die die Gestalt irgendeiner Kurve habe. Da in einem solchen Falle der bewegte Körper keine Arbeit verrichtet und er infolgedessen seine lebendige Kraft und somit auch seinen Geschwindigkeitsbetrag unverändert beibehält, so muß (nach § 8) die Tangentialbeschleunigung stets verschwinden. Die Beschleunigung wird also in diesem Falle mit der Normalbeschleunigung gleichbedeutend und ist in ihrem Betrage nach Gl. 27 gleich dem durch den Krümmungshalbmesser dividierten Geschwindigkeitsquadrat.

Wird nun der bewegte Körper durch eine Wand daran gehindert, sein Beharrungsbestreben zu verwirklichen, so müssen wir gemäß dem dritten Newtonschen Bewegungsgesetz erwarten, daß er gegen die Wand eine Reaktionskraft ausübt, die der Normalbeschleunigung entgegengesetzt und dem Produkt aus ihr und der Masse gleich ist. Da die Normalbeschleunigung (nach § 8) immer zum Krümmungsmittelpunkt gerichtet ist, muß demnach die Reaktionskraft immer vom Krümmungsmittelpunkt weg gerichtet sein. Diese Reaktionskraft, die eine Folge der Bahnkrümmung ist, wird als Zentrifugalkraft bezeichnet. Ihr Wert ist mv^2/ϱ, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser bedeutet, der eben im Sonderfall einer Kreisbewegung mit dem Radius des Kreises identisch wird.

In analoger Weise müssen wir, wenn sich ein unfreier Massenpunkt unter dem Einfluß einer Kraft bewegt, erwarten, daß die Reaktionskraft entgegengesetzt gleich ist dem vektoriellen Unterschied zwischen der tatsächlich angreifenden Kraft und dem Produkt aus der Masse und der tatsächlich hervorgebrachten Beschleunigung. Ein besonders einfaches Beispiel hierfür bildet der Druck, den ein schwerer Körper auf eine Unterlage ausübt, die selbst

irgendwie beschleunigt ist. Ist die Beschleunigung der Unterlage g' (vertikal nach abwärts gerichtet) und ist g die Beschleunigung des freien Falles, so ist der von dem Körper von der Masse m auf seine Unterlage ausgeübte Gesamtdruck durch den Ausdruck m (g—g') bestimmt. Die scheinbare Gewichtsverminderung, die wir unangenehm empfinden, wenn sich ein abwärts fahrender Aufzug in Bewegung setzt, erklärt sich aus dieser Beziehung, die eine unmittelbare empirische Bestätigung durch die in einem späteren Abschnitt zu besprechende Poggendorffsche Wage findet.

Andererseits erkennen wir aus der Formel für die Tangentialbeschleunigung (Gl. 27), daß die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers nur durch die jeweilige Tangentialkomponente der Kraft bestimmt ist. Nennen wir diese Komponente T, so gilt nach Gl. 27 die Beziehung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T}{m}. \tag{51}$$

Nun kann aber ein Körper nur derart in Bewegung gesetzt werden, daß sein Geschwindigkeitsbetrag von Null auf eine endliche Größe erhöht wird. Wirkt also auf einen Massenpunkt, dessen Bewegungsfreiheit beschränkt ist, eine Kraft, die auf der für ihn zulässigen Bahn oder Ebene senkrecht steht, so vermag sie den Massenpunkt nicht in Bewegung zu setzen; der Massenpunkt verbleibt dann trotz des Angriffes einer Kraft in Ruhe, wie dies ja das Beispiel eines schweren Körpers auf einer horizontalen Ebene zeigt. Eine beliebige Kraft aber wirkt auf einen in seiner Bewegungsfreiheit beschränkten Massenpunkt so, daß die Normalkomponente stets in Wegfall kommt. Hierfür bietet die schon früher betrachtete Bewegung auf der schiefen Ebene das einfachste Beispiel.

§ 38. Die Verallgemeinerung der dynamischen Prinzipe für Massensysteme.

Wenn wir Systeme von Massenpunkten betrachten, so können wir die an dem System angreifenden Kräfte in zwei Gruppen teilen: in innere Kräfte, die zwischen den einzelnen Massenpunkten wirken, und in äußere Kräfte, als die wir alle übrigen ansehen. Aus dem Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion folgt aber nun, daß jeder inneren Kraft, die ein beliebiger Massenpunkt I auf einen beliebigen anderen Massenpunkt II ausübt, eine gleich große, jedoch entgegengesetzte Kraft entsprechen muß, die der Massenpunkt II auf den Massenpunkt I ausübt. Hieraus läßt sich mittels elementarer mathematischer Beziehungen zunächst der Satz ableiten, daß der zeitliche Differentialquotient des

Vektors der gesamten Bewegungsgröße eines Systems gleich ist der vektoriellen Summe aus allen an dem System angreifenden äußeren Kräften; die gesamte Bewegungsgröße des Systems ist dabei aufzufassen als die vektorielle Summe aus den Bewegungsgrößen der einzelnen Massenpunkte.

In diesem Satze erkennen wir die Verallgemeinerung des zweiten Newtonschen Bewegungsgesetzes. Die inneren Kräfte bleiben ohne Einfluß auf die Bewegungsgröße. Hieraus folgt, daß die gesamte Bewegungsgröße eines Systems, auf das keine äußeren Kräfte wirken, ungeändert bleiben muß*).

Diesen Satz kann man auch in anderer Form aussprechen, wenn man den bereits von Archimedes (um 250 v. Chr.) in die Physik eingeführten Begriff des Massenmittelpunktes benutzt. Als Mittelpunkt zweier Massen wird der geometrische Punkt definiert, der die Verbindungsstrecke der beiden Massen im umgekehrten Verhältnis der Massen teilt. Sind die beiden Massen m_1 und m_2 in den Punkten A und B (Fig. 34), so ist der Mittelpunkt S der beiden Massen durch die Beziehung bestimmt

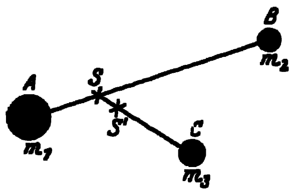


Fig. 34. Der Massenmittelpunkt.

$$AS : SB = m_2 : m_1 . \tag{52}$$

Der Mittelpunkt dreier Massen, beispielsweise der beiden vorhin betrachteten und einer dritten Masse m_3 im Punkte C wird definiert als Mittelpunkt aus einer Masse von der Größe $(m_1 + m_2)$ im Punkte S und aus der Masse m_3. So ergibt sich der Mittelpunkt dieser drei Massen, der S' genannt werde, gemäß der Beziehung

$$SS' : S'C = m_3 : (m_1 + m_2) . \tag{53}$$

Ganz allgemein sind, wie sich leicht zeigen läßt, die Koordinaten des Massenmittelpunktes von beliebig vielen Massen durch die Formeln bestimmt

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\sum m_h x_h}{\sum m_h} \\ \eta &= \frac{\sum m_h y_h}{\sum m_h} \\ \zeta &= \frac{\sum m_h z_h}{\sum m_h}; \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

*) In der Anwendung auf das Universum hat diesen Satz zuerst Descartes (1644) aufgestellt.

hierbei sind x_h, y_h, z_h die Koordinaten eines unter den numeriert gedachten Massenpunkten, und zwar desjenigen mit der Nummer h, und die Summierungen sind über alle Nummern von 1 bis n vorzunehmen, wenn das System aus n Massenpunkten besteht.

Der früher erwähnte Satz von der Konstanz der gesamten Bewegungsgröße läßt sich nun auch in der Form aussprechen, daß der Massenmittelpunkt eines Systems, auf das nur innere Kräfte wirken, ruhen oder in geradliniger, gleichförmiger Bewegung fortschreiten muß. Man bezeichnet dieses Prinzip als den Satz von der Erhaltung des Massenmittelpunktes oder auch kurz als den Schwerpunktsatz, weil der Massenmittelpunkt auch Schwerpunkt genannt wird.

In dem Schwerpunktsatz erkennen wir leicht die Verallgemeinerung des Beharrungsgesetzes. Das zweite Newtonsche Bewegungsgesetz erscheint aber wieder durch den Satz verallgemeinert, daß sich bei dem Vorhandensein äußerer Kräfte das System so verhält, als ob seine ganze Masse in dem Massenmittelpunkt konzentriert wäre und in dem Massenmittelpunkt alle die äußeren Kräfte, die tatsächlich auf die einzelnen Massenpunkte ausgeübt werden, in gleicher Stärke und in gleicher Richtung angreifen würden.

Wenn im besonderen die inneren Kräfte sogenannte Zentralkräfte sind, d. h. in der Richtung der Verbindungslinie wirken, läßt sich für ein Massensystem ein weiteres Prinzip beweisen, das ebenfalls eine Verallgemeinerung eines für den einzelnen Massenpunkt bereits abgeleiteten Theorems darstellt. Wenn die inneren Kräfte Zentralkräfte sind, bleibt nämlich der auf einen beliebigen Punkt bezogene gesamte Drehimpuls des Systems, der sich durch vektorielle Addition der Drehimpulse der einzelnen Massenpunkte ergibt, nach Größe und Richtung ungeändert, wofern keine äußeren Kräfte wirken oder aber nur solche, die zu dem Bezugspunkt gerichtet sind. Häufig wird dieses Prinzip der Erhaltung des gesamten Drehimpulses auch als Satz von der Erhaltung der Flächenmomente oder der Rotationsmomente bezeichnet.

Wenn der Massenmittelpunkt eines solchen Systems ruht, gilt überdies die Beziehung, daß sich der gesamte Drehimpuls stets in derselben Größe und Richtung ergibt, wie immer man den Bezugspunkt wählt. In diesem Fall ist der gesamte Drehimpuls vom Bezugspunkt unabhängig. Sonst muß er immer auf einen bestimmten Punkt bezogen werden, als welchen man zweckmäßig den Massen-

mittelpunkt des Systems wählt. Der Vektor des auf den Massenmittelpunkt bezogenen gesamten Drehimpulses behält jedesfalls bei dem Fehlen äußerer Kräfte außer der Größe auch seine Richtung unverändert bei. Infolgedessen kann man in jedem nur inneren Zentralkräften unterliegenden System durch den Massenmittelpunkt eine Ebene derart legen, daß sie trotz aller Konstellationsänderungen immer dieselbe Lage, nämlich senkrecht zur Richtung des gesamten Drehimpulses, beibehält. Diese Ebene wird die invariable Ebene des Systems genannt.

Auch das für einen einzelnen Massenpunkt abgeleitete Theorem von der Konstanz der mechanischen Energie kann unter gewissen Voraussetzungen auf Massensysteme verallgemeinert werden. Dazu müssen allerdings die inneren Kräfte nicht bloß Zentralkräfte sein, sondern noch die weitere Bedingung erfüllen, daß ihr Betrag bei gegebenen Massen nur von der wechselseitigen Entfernung abhängt. Dann läßt sich der Begriff des Potentials zu dem der inneren potentiellen Energie des Systems erweitern. Diese hängt bei gegebenen Massen nur von den wechselseitigen Distanzen im System ab und ergibt durch eine einfache Rechenoperation die inneren Kräfte; deren Komponenten erhält man nämlich durch partielle Differentiation der inneren potentiellen Energie nach den Koordinaten. Besteht ein inneres Potential, so erweist sich die Summe aus ihm und aus der lebendigen Kraft des Systems bei dem Fehlen äußerer Kräfte als eine von der Konstellation und der Zeit unabhängige, für das System charakteristische Konstante, die als die mechanische Energie des Systems bezeichnet wird. Die lebendige Kraft eines solchen Systems muß also immer wieder denselben Wert annehmen, wenn dieselbe Konstellation wiederkehrt, und darum wird mit einem von Leibniz geschaffenen Ausdruck ein solches System als ein konservatives bezeichnet.

Der Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie gilt auch bei dem Vorhandensein äußerer Kräfte, wofern diese ein Potential besitzen. Dann bleibt die Summe aus der gesamten potentiellen und der gesamten kinetischen Energie konstant. Jene setzt sich zusammen aus dem inneren und dem äußeren Potential; die gesamte kinetische Energie aber setzt sich, wie sich leicht zeigen läßt, zusammen aus der lebendigen Kraft der Bewegung des Systems in bezug auf den Massenmittelpunkt und aus der lebendigen Kraft der Bewegung, mit der die im Massenmittelpunkt konzentriert gedachte Gesamtmasse des Systems mit diesem Punkt fortschreiten würde.

Man bezeichnet auch die Summe aus dem ersten Teil der lebendigen Kraft und dem inneren Potential als die innere Energie des Systems und die Summe aus dem zweiten Teil der lebendigen Kraft und dem äußeren Potential als die äußere Energie des Systems. Es kann leicht gezeigt werden, daß jede Änderung der inneren Energie eine gleich große, entgegengesetzte Änderung der äußeren Energie zur Folge hat und umgekehrt.

§ 39. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

Die Beschränkungen der Bewegungsfreiheit können bei einem System von Massenpunkten jedesfalls mannigfacher sein als bei einem einzelnen Massenpunkt. Denn zu der Forderung, daß sich ein bestimmter Massenpunkt nur in einer bestimmten Fläche oder Linie bewegen kann, kommen als die wichtigsten Beschränkungen bei einem System noch diejenigen hinzu, die aus bestehenden Verbindungen zwischen Massenpunkten herrühren. Ein grundlegendes Problem entsteht nun jedesfalls der Mechanik in der Frage, wann im allgemeinen ein derart in der Bewegungsfreiheit beschränktes Massensystem beim Vorhandensein äußerer Kräfte in Ruhe verharrt, also sich, wie man zu sagen pflegt, im Gleichgewicht befindet.

Die Antwort auf diese Frage finden wir, indem wir ganz allgemein einen Übergang eines Systems aus einer Konstellation I in eine andere Konstellation II betrachten, die ebenso wie die erste mit den die Bewegungsfreiheit einschränkenden Bedingungen verträglich ist. Doch wollen wir, da sich fur andere als ganz kleine Konstellationsänderungen auch die einschränkenden Bedingungen ändern könnten, nur solche Übergänge betrachten, bei denen die Massenpunkte kleine Lagenänderungen erfahren. Hierbei beschreibt also jeder Massenpunkt ein irgendwie gerichtetes Wegelement, und wenn wir für einen Massenpunkt das innere Produkt aus dem Vektor des Wegelementes und aus der Resultierenden aus allen an dem Massenpunkt angreifenden Kräften bilden und diese inneren Produkte über alle Massenpunkte summieren, so erhalten wir (nach § 31) die Arbeit, die bei der betreffenden Lagenänderung des Systems verrichtet wird. Ein in Ruhe befindliches System kann aber nur dann in eine andere Lage übergehen, wenn zunächst Arbeit aufgewendet wird; denn während des Überganges kommt dem System lebendige Kraft zu, die im Zustand der Ruhe noch nicht vorhanden war.

Wenn daher eine Konstellation des Systems so beschaffen ist, daß für jeden probeweise angenommenen Übergang in eine

andere, nur wenig verschiedene, aber mit den gegebenen Bedingungen ebenfalls verträgliche Konstellation die Arbeit verschwinden würde, dann muß das System in dieser Konstellation in Ruhe verharren können, dann befindet es sich unter der Einwirkung der gegebenen Kräfte im Gleichgewicht. Das Verschwinden der Arbeit bei einer derartigen, sogenannten virtuellen Verrückung des Systems ist aber nicht nur eine notwendige, sondern, wie theoretische Überlegungen zeigen, auch eine hinreichende Gleichgewichtsbedingung.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen, das in klarer Formulierung zuerst von Johann Bernouilli (1717) ausgesprochen wurde, erweist sich als außerordentlich fruchtbar bei der Behandlung statischer Probleme und wird in späteren Abschnitten noch wiederholt Anwendung finden; hier mögen nur zwei einfache Beispiele dazu dienen, es etwas zu veranschaulichen. Fig. 35 zeigt eine feste Rolle in Verbindung mit beweglichen; an der festen hänge ein Gewicht von $^1/_6$ kg, an den beweglichen eines von 1 kg. Bei einer virtuellen Verrückung legt das Gewicht von $^1/_6$ kg, wie ohne weiteres aus der Figur ersichtlich ist, eine sechsmal so große Strecke zurück wie das Kilogrammgewicht. Es besteht in der Tat Gleichgewicht, wenn sich die Gewichte wie 1 : 6 verhalten (Kraft- und Wegrichtung fallen ja, vom Richtungssinn abgesehen, zusammen, so daß das innere Produkt einfach gleich dem Produkt der Beträge wird).



Fig. 35.

Die Robervalsche Wage, die als zweites einfaches Beispiel dienen möge, besteht aus einem Parallelogramm mit veränderlichen Winkeln, wobei die zwei längeren Seiten um ihre Mittelpunkte A und B drehbar sind; die beiden anderen Seiten sind stets vertikal und tragen in ihren Mitten wieder horizontale Stäbe, an die man Gewichte hängen kann (Fig. 36). Es zeigt sich dann, daß zwei gleiche Gewichte einander stets das Gleichgewicht halten, an welcher Stelle immer man sie aufhängt. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen macht dies ohne weiteres verständlich; denn bei einer Verrückung senkt sich das eine Gewicht stets um ebenso viel, als sich das andere hebt.

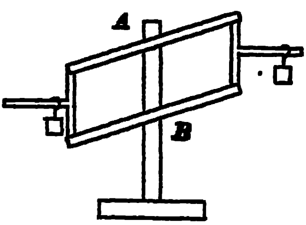


Fig. 36. Robervalsche Wage.

§ 40. Das Prinzip von d'Alembert.

Die Betrachtung eines einzelnen unfreien Massenpunktes hat uns bereits zu der Erkenntnis der Reaktionskraft geführt, die sich

durch vektorielle Subtraktion der tatsächlich angreifenden Kraft von dem Produkt aus der Masse und der tatsächlichen Beschleunigung ergibt. In Fig. 37 stelle etwa die gerichtete Strecke OA die tatsächlich angreifende Kraft dar, OB sei gleich dem Produkte aus der Masse und der tatsächlichen Beschleunigung; dann ist durch die Strecke AB die Reaktionskraft dargestellt. Im umgekehrten Richtungssinn stellt diese Strecke (also die Strecke BA) den Anteil dar, der von der angreifenden Kraft infolge der Beschränkungen der Bewegungsfreiheit „verloren" geht. Darum wird auch eine der Reaktionskraft entgegengesetzt gleiche Kraft als *verlorene Kraft* bezeichnet*).

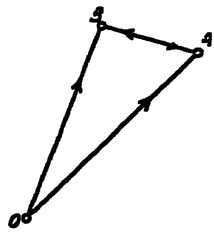


Fig. 37.

Die Beschleunigung ist dieselbe, ob nun an dem Massenpunkt die tatsächliche Kraft bei den gegebenen Beschränkungen angreift oder im freien Zustand die Resultierende aus ihr und der Reaktionskraft angreifen würde; denn diese Resultierende ist ja eben durch die Strecke OB dargestellt, die einer Kraft entspricht, die gleich ist dem Produkt aus der Masse und der tatsächlichen Beschleunigung. Die Reaktionskraft vermag daher keine Beschleunigung hervorzubringen, und ebensowenig vermag es natürlich die ihr entgegengesetzte verlorene Kraft.

Gehen wir von dem einzelnen Massenpunkt zu einem *Massensystem* über, so werden wir somit zu dem Satze geführt, daß sich *alle verlorenen Kräfte des Systems stets im Gleichgewicht* befinden müssen. Dieses wichtige Theorem wird nach seinem Begründer (1743) als das *Prinzip von d'Alembert* bezeichnet.

Auch *für bewegte Systeme* behält also das Prinzip der virtuellen Verrückungen seine Gültigkeit, wofern man es auf die verlorenen Kräfte oder, was ja dasselbe bedeutet, auf die Reaktionskräfte bezieht.

Nur ein besonders einfaches Beispiel möge hier zur Veranschaulichung des *d'Alembertschen* Prinzips gebraucht werden. An einer Wage seien zwei Gewichte angebracht, ein schwereres P_1 und ein leichteres P_2. Wir fragen nach der Beschleunigung b, mit der sich bei Aufhebung der Arretierung das Gewicht P_1 nach abwärts und das Gewicht P_2 nach aufwärts in Bewegung setzen. Nennen wir die Fallbeschleunigung g, so sind die Massen P_1/g und P_2/g; die ver-

*) Mit dem Ausdruck „Verlorene Kraft" soll natürlich keineswegs gesagt sein, daß der durch die Strecke OA dargestellte Kraftbetrag stets größer sei als der durch die Strecke OB repräsentierte.

lorenen Kräfte müssen einander das Gleichgewicht halten, und dies ist, da es sich um eine Wage handelt, dann der Fall, wenn sie einander gleich sind. Es muß also sein

$$P_1 - P_1 \frac{b}{g} = P_2 + P_2 \frac{b}{g}$$

oder

$$b = g \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}. \tag{55}$$

§ 41. Die Freiheitsgrade.

Die die Bewegungsfreiheit eines Systems einschränkenden Bedingungen lassen sich im allgemeinen in der Form von Gleichungen ausdrücken, die die Koordinaten der einzelnen Massenpunkte miteinander verknüpfen. Haben wir beispielsweise einen einzelnen Massenpunkt, der gezwungen ist, in einer und derselben Fläche zu verharren, so muß zwischen seinen drei Koordinaten stets die Gleichung dieser Fläche erfüllt sein. Ist die Bewegung des einzelnen Massenpunktes an eine Kurve gebunden, so mussen zwischen seinen Koordinaten stets zwei Gleichungen erfüllt sein, weil ja im Raume eine Linie erst durch zwei Gleichungen festgelegt ist.

Aber auch dann, wenn zwischen Massenpunkten eine Verbindung besteht, kann diese in einer Gleichung zwischen den Koordinaten ausgedrückt werden. Haben beispielsweise zwei Massenpunkte eine unveränderliche wechselseitige Entfernung, so besteht zwischen ihren Koordinaten, die durch die Indizes h und k unterschieden werden mögen, die Gleichung

$$(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2 = r_{hk}^2. \tag{56}$$

Ganz allgemein bezeichnen wir, wenn das System aus n Massenpunkten besteht und daher seine Lage durch 3 n Koordinaten festgelegt ist und wenn seine Bewegungsfreiheit durch s Gleichungen eingeschränkt ist, die Zahl (3 n — s) als die Zahl der Freiheitsgrade des Systems.

Viertes Kapitel.

Die Fallbewegung.

§ 42. Die Atwoodsche Fallmaschine.

Der geeignetste Apparat zur Untersuchung der Fallbewegung und zugleich zur experimentellen Bestätigung des Newtonschen Kraftgesetzes ist die in früheren Abschnitten bereits kurz erwähnte, von Atwood im Jahre 1784 ersonnene und nach ihm benannte Fallmaschine. Sie besteht aus einem etwa 2 m hohen Gestell von

zwei Säulen, das mittels Fußschrauben genau vertikal gestellt werden kann (Fig. 38). Die eine Säule trägt oben ein leichtes, gut drehbares Rad mit einem ausgehöhlten Rande. In die Hohlung wird ein Faden gelegt, der an seinen beiden Enden zwei gleiche Gewichte (m und n) trägt. Die andere Säule ist mit einer Zentimeterteilung versehen. Längs dieser Teilung sind zwei horizontale Schieber verschiebbar. Der eine enthält ein kreisförmiges Loch, während der andere nicht durchlöchert ist. Auf die Gewichte können entweder im Bedarfsfall „Zusatzgewichte" aufgelegt werden,

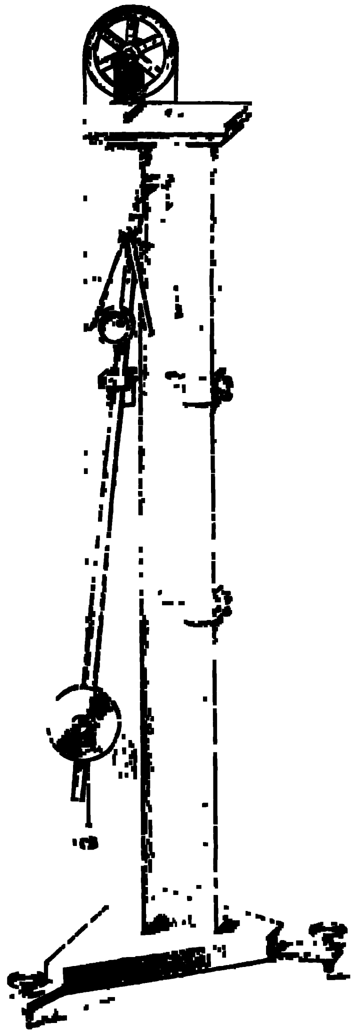


Fig. 38. Die Atwoodsche Fallmaschine.

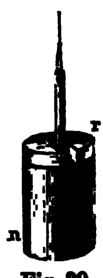


Fig. 39.

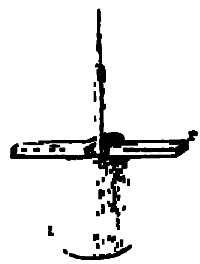


Fig 40

denen man dieselbe zylindrische Form und denselben Querschnitt wie dem Gewicht n gibt (Fig. 39) oder aber leicht abhebbare „Übergewichte", die man in der Form gestreckter Platten wählt (Fig. 40). Bei dem Nullpunkt der Zentimeterteilung befindet sich eine Fallbrücke (s); durch einen Hebel (h) wird sie in horizontaler Lage erhalten, fällt aber hinab, sobald der Hebel bewegt wird. An der Fallmaschine oder neben ihr wird schließlich ein Sekundenpendel angebracht, das durch Anschlagen gegen eine Glocke die Sekunden genau anzeigt. Dieses Sekundenpendel ver-

bindet man zweckmäßig derart mit dem Hebel (h), daß mit dem ersten Anschlag des Sekundenpendels die Fallbrücke ausgelöst wird.

Wenn nun auf das eine der beiden Gewichte ein Übergewicht aufgesetzt wird, so erscheint dieses als bewegende Kraft im Sinne des zweiten Newtonschen Bewegungsgesetzes. Die bewegte Masse setzt sich zusammen aus den Massen der beiden Gewichte m und n, aus der Masse des Übergewichtes r und schließlich aus der Masse der Rolle, die etwa mit p bezeichnet werde; denn alle Punkte des Umfangs der Rolle müssen stets dieselbe Geschwindigkeit haben wie alle Punkte des Fadens oder wie die beiden Gewichte; die radförmige Rolle soll aber so konstruiert sein, daß die Masse der Speichen neben der des Rades selbst vernachlässigt werden kann.

Nach dem Newtonschen Kraftgesetz ist dann die durch das Übergewicht hervorgerufene Beschleunigung

$$b = g \frac{r}{m + n + r + p}, \tag{57}$$

wenn mit g wieder die Beschleunigung des freien Falles bezeichnet wird*). Es sei beispielsweise die Masse der Rolle 79 g, die der Gewichte m und n je 10 g und die des Übergewichtes gleich 1 g, dann wird die Beschleunigung hundertmal so klein wie bei dem freien Fall; die Fallräume und Geschwindigkeiten sind dann numerisch gleich denen des freien Falles, wofern an die Stelle von Metern Zentimeter gesetzt werden.

§ 43. Die Messung der Fallräume.

Mittels der Atwoodschen Fallmaschine läßt sich zunächst leicht zeigen, daß in der Tat die vom Beginn der Fallbewegung an zurückgelegten Fallräume sich wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten. Indem man dies zeigt, erbringt man zugleich auf Grund rein kinematischer Beziehungen den Nachweis dafür, daß die durch das Übergewicht hervorgerufene Bewegung mit konstanter Beschleunigung vor sich geht. Am einfachsten prüft man das Fallgesetz, indem man die Fallräume berechnet, die nach Ablauf von 1, 2, 3, 4, 5 Sekunden zufolge Gl. 57 zurückgelegt werden müßten gemäß der Beziehung, daß der Fallraum gleich ist dem halben Produkt aus Beschleunigung und Zeitquadrat. Bei den vorhin beispielsweise angegebenen Versuchsbedingungen wäre also die Beschleunigung als hundertster Teil der (etwa aus Versuchen an schiefen

---

*) Da sich die Massen wie die Gewichte verhalten, können wir uns in Gl. 57 natürlich auch im Zähler wie im Nenner die Massen durch die Gewichte ersetzt denken.

Ebenen bekannten) Beschleunigung des freien Falles 9,80 cm sec^{-2}, und daher ergibt die Berechnung für die Fallräume nach Ablauf von

1	2	3	4	5	Sekunden:
4,9	19,6	44,1	78,4	122,5	cm.

Man stellt nun den nicht durchlöcherten Schieber (den anderen entfernt man) nacheinander an die derart berechneten Stellen: durch das Sekundenpendel löst man die Fallbrücke aus, die bis dahin das Gewicht n trägt. Man überzeugt sich dann davon, daß mit dem betreffenden Sekundenschlag in der Tat das niedergehende mit dem Übergewicht belastete Gewicht auf den Schieber aufschlägt.

Bei der Durchführung des Experimentes bemerkt man allerdings ein geringes Zurückbleiben; es rührt daher, daß der Luftwiderstand und die Fadenreibung der Bewegung entgegenwirken und auch das Gewicht des Fadens und der Radspeichen nicht ohne allen Einfluß ist. Man kann jedoch diese Einflüsse ausschalten, indem man das Übergewicht soweit vergrößert, daß es etwa genau nach 5 Sekunden an der vorausberechneten Stelle anlangt; dann zeigt sich auch genaues Eintreffen an den vorausberechneten Stellen für die Fallzeiten von 1, 2, 3 und 4 Sekunden. Selbstverständlich kann man auch umgekehrt derartige Versuche zu einer Berechnung, sei es der Größe g, sei es der für den Versuch in Betracht kommenden Rollenmasse p, benutzen.

§ 44. Die Messung der Fallgeschwindigkeit.

Da bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung die erlangten Momentangeschwindigkeiten der seit Bewegungsbeginn verflossenen Zeit proportional sind, so läßt sich der Beweis für die Konstanz der Beschleunigung auch durch Messung der Geschwindigkeiten erbringen. Hierzu hebt man in dem Augenblick, für den die Momentangeschwindigkeit ermittelt werden soll, mittels des oberen Schiebers das stangenförmige Übergewicht ab, wobei das Gewicht n selbst (samt etwaigen Zusatzgewichten) durch die kreisförmige Öffnung des Schiebers hindurchgeht. Da nach dem Abheben des Übergewichtes keine Kraft mehr wirksam ist, so muß sich von da ab das Gewicht n gleichförmig bewegen und somit der in der nächsten Sekunde zurückgelegte Weg unmittelbar die Geschwindigkeit bestimmen.

Da die Geschwindigkeit bei konstanter Beschleunigung dem Produkt aus dieser und der Zeit gleich ist, so sind also in unserem Beispiel die Geschwindigkeiten nach Ablauf der ersten 5 Sekunden

9,8 19,6 29,4 39,2 49,0 cm/sec.

Addieren wir zu diesen fünf Zahlen die fünf in § 43 angegebenen hinzu, so erhalten wir demnach die Stellen, an denen das Gewicht eine Sekunde nach Abhebung des Übergewichtes anlangen muß, wenn dieses 1, 2, 3, 4, 5 Sekunden nach Beginn der Fallbewegung entfernt wird. Diese fünf Stellen entsprechen also folgenden Teilstrichen:

14,7 39,2 73,5 117,6 171,5.

In der Tat bestätigen die Versuche dieses Ergebnis der Berechnungen. Man stellt bei dem ersten Versuche den durchlöcherten Schieber bei 4,9 cm ein und den anderen Schieber bei 14,7 cm. Bei dem zweiten Versuch kommen die beiden Schieber zu den Stellen 19,6 und 39,2; bei dem dritten Versuch zu 44,1 und 73,5; bei dem vierten Versuch zu 78,4 und 117,6 und endlich bei dem fünften Versuch zu 122,5 und 171,5. Man überzeugt sich dann in der Tat davon, daß das Anschlagen an den unteren Schieber immer gleichzeitig mit einem Anschlag des Pendels an die Glocke erfolgt.

§ 45. Die Bestätigung der Beziehungen zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung.

Daß gemäß dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetz die Beschleunigung der einwirkenden Kraft direkt und der bewegten Masse umgekehrt proportional ist, laßt sich ebenfalls leicht mittels der Atwoodschen Fallmaschine demonstrieren. Wir können zunächst bei gleichbleibender Masse die Kraft vermehren, indem wir etwa von dem Gewicht m, das aus einzelnen Scheiben zusammengesetzt sei, eine Scheibe vom Gewichte eines Gramms wegnehmen und auf das Gewicht n auflegen. Ohne eine Änderung der bewegten Masse dadurch herbeizuführen, erreichen wir derart ein Übergewicht von zwei Gramm, also eine Verdoppelung des Übergewichtes gegenüber dem früheren Versuch, und in der Tat zeigen die Beobachtungen dann Verdoppelung der Fallräume und Fallgeschwindigkeiten, entsprechend der Verdoppelung der Beschleunigung.

Andererseits verdoppeln wir bei gleichbleibendem Übergewicht die Masse, indem wir sowohl das Gewicht m als auch das Gewicht n um 50 g vermehren. Die Beobachtungen ergeben, daß die Fallräume und Geschwindigkeiten nunmehr bloß halb so groß sind wie bei dem ursprünglichen Versuch. Dagegen erhalten wir wieder die ursprünglichen Fallräume (also z. B. 4,9 cm nach 1 Sekunde) und die ursprünglichen Geschwindigkeiten, wenn wir nunmehr lediglich von

der einen Seite $^1/_2$ g wegnehmen und es auf die andere Seite hinüberlegen*).

§ 46. Beobachtungen bei stetig veränderlicher Kraft.

Wenn wir uns an der Atwoodschen Fallmaschine ein stetig veränderliches Übergewicht wirkend denken, so muß nach dem Newtonschen Kraftgesetz jedesfalls auch die Beschleunigung stetig veränderlich sein. Mittels zweier einfacher Vorrichtungen hat J. Müller**) die beiden wichtigen, in der Kinematik besprochenen Spezialfälle zu realisieren vermocht, bei denen die Beschleunigung entweder der Zeit oder dem Wege proportional ist.

Zur Verwirklichung des ersten Spezialfalls bediente sich Müller eines kleinen Glasgefäßes, dessen obere Mündung durch einen Kork verschlossen ist und das an seinem Boden eine feine Öffnung (a) hat (Fig. 41). Durch den Kork geht ein an beiden Enden offenes Glasrohr hindurch, dessen oberes Ende (c) hakenformig gebogen ist; das andere Ende (b) reicht bis nahe an die Ausflußöffnung heran. Das Gefäß wird nun mit Wasser gefüllt, das sodann (wie aus dem aërostatischen Prinzip der Marioteschen Flasche folgt***) bei a mit konstanter Ausflußgeschwindigkeit austritt. Durch Veränderung des Abstandes zwischen a und b kann im übrigen die Ausflußgeschwindigkeit beliebig reguliert werden. Wird das Glasgefäß an Stelle des einen der beiden Gewichte angebracht, und zwar derart, daß anfangs Gleichgewicht herrscht, so erlangt durch den fortgesetzten Ausfluß die andere Seite ein ständig wachsendes Übergewicht; die Veränderung der Masse, die durch das Ausfließen bedingt ist, kann dabei vernachlässigt werden.



Fig. 41.

Bei einem Versuche wurde beispielsweise die Ausflußöffnung so reguliert, daß in 1 Sekunde aus einem etwa 20 g fassenden Gläschen 1 g Wasser ausfloß. Zugleich wurde durch Versuche festgestellt, daß ein Übergewicht von 1 g eine Beschleunigung von 1,2 Einheiten hervorbrachte. Für die Beschleunigung galt somit die Beziehung $b = 1{,}2 \cdot t$, wobei für t die in Sekunden gemessene,

---

*) Natürlich kann man auch umgekehrt durch derartige Versuche an der Fallmaschine die Größe ermitteln, die als wirksame Masse der Rolle in Rechnung zu ziehen ist.

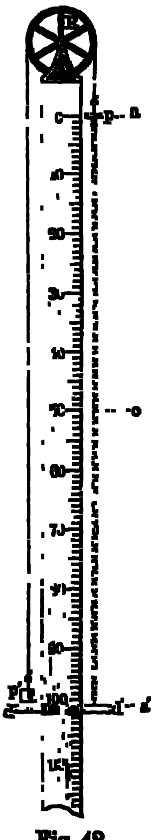
**) Vgl. Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie (11. Auflage, Braunschweig 1919).

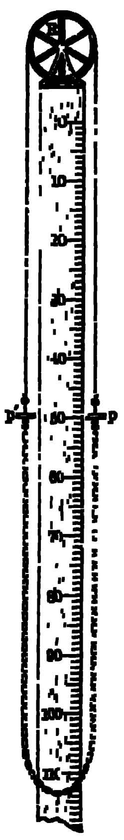
***) Vgl. § 20, Fig. 19.

seit Bewegungsbeginn verflossene Zeit einzusetzen war. Hieraus folgte für den seit Bewegungsbeginn aus der Nullage zurückgelegten Weg (nach Gl. 13) $s = 0{,}2 \cdot t^3$, wofern sich zur Zeit $t = 0$ das Gewicht, dem anfangs das Gläschen das Gleichgewicht hielt, in Ruhe bei dem Teilstrich Null befand. Nach Ablauf der ersten 7 Sekunden waren daher die folgenden Fallräume zu erwarten:

0,2 1,6 5,4 12,8 25,0 43,2 68,6 cm.

Der Versuch wird nun so durchgeführt, daß zunächst das Gläschen das Übergewicht hat, das Gegengewicht sich aber bei dem Nullstrich befindet und durch eine oberhalb befindliche Platte am Steigen verhindert ist. Wenn das Wasser aus dem Gläschen auszufließen beginnt, so wird allmählich das Gegengewicht schwerer als das Gläschen, und von diesem Augenblick an beginnen das Gläschen zu steigen und das Gegengewicht niederzugehen. Bringt man den nicht durchlöcherten Schieber nun entweder bei dem Teilstrich 43,2 oder bei dem Teilstrich 68,6 an, so nimmt man in der Tat das Anschlagen des Gewichtes bei dem sechsten oder siebenten Sekundenschlag wahr. Damit ist erwiesen, daß eine der Zeit proportionale Kraft auch eine der Zeit proportionale Beschleunigung zur Folge hat.


Fig. 42.


Fig. 43.

Leicht läßt sich auch eine Fallbewegung realisieren, bei der die **Beschleunigung der Entfernung** von einer bestimmten Stelle **proportional** und entgegengesetzt ist. Einfache Versuche hierzu sind durch die Figg. 42 und 43 dargestellt. Bei dem ersten Versuch wird an das eine Gewicht (p) ein Kettchen (aa′) angehängt, das sich bei dem Niedergehen dieses Gewichtes auf einem horizontalen Tisch (d′) ablagert; das andere Gewicht p′ wird hierbei so groß gewählt, daß es gleich ist der Summe aus p und dem Gewicht des halben Kettchens. Ist das Kettchen 100 cm lang, und ist das Gewicht p′ bei dem Teilstrich 100, wenn das Gewicht p bei dem Teilstrich 0 ist, so ist leicht einzusehen, daß sowohl das

Gewicht p als auch das Gewicht p′ um den Teilstrich 50 schwingende Bewegungen ausführen müssen, weil der auf der Tischplatte abgelagerte Teil des Kettchens nicht in Betracht kommt: sobald aber mehr als die Hälfte abgelagert ist, hat das Gewicht p′ das Übergewicht.

Zu einer derartigen Schwingung kommt es natürlich auch bei dem anderen, durch Fig. 43 dargestellten Versuch, bei dem die Kette an beiden Gewichten befestigt ist; hier wird die schwingende Bewegung eingeleitet, indem einfach das eine der beiden Gewichte in die Hohe gezogen wird, wobei sich das andere Gewicht um dieselbe Strecke senkt*).

Wenn auch infolge der Reibung und der Stöße die Schwingungen rasch abnehmen, so zeigen die Versuche (wegen deren näheren Beschreibung auf Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik verwiesen sei) doch deutlich, daß die Schwingungsdauer von der Schwingungsweite unabhängig ist und im übrigen nur von dem auf die Längeneinheit des Kettchens entfallenden Gewicht abhängt. In der Tat ist ja das Übergewicht gleich dem doppelten Produkt aus dieser Konstanten und der Entfernung, die die Gewichte von dem Teilstrich 50 haben; nach dem Newtonschen Kraftgesetz kann also. wenn wir die Beschleunigung gleich h × s setzen (s der Abstand von dem Teilstrich 50), der Proportionalitätsfaktor h auch nur von dem Gewicht der Langeneinheit des Kettchens abhängen, und dasselbe muß dann nach Gl. 25 auch von der Schwingungsdauer gelten. Wenn wir durch geeignete Wahl der Gewichte p und p′ es bewerkstelligen. daß das Gewicht in 1 Sekunde vom Teilstrich 40 bis zu dem Teilstrich 60 sinkt, so sinkt es ebenfalls in 1 Sekunde vom Teilstrich 30, wofern es zu ihm gehoben ist, zum Teilstrich 70 oder von 20 bis 80 usw.

§ 47. Die Fallmaschine von Poggendorff.

Ist ein Körper mit einer vertikalen Beschleunigung b nach abwarts bewegt, so erfährt, wie schon in § 37 gezeigt wurde, der Gesamtdruck, den er infolge seines Gewichtes auf eine Unterlage ausübt, eine Verminderung um das Produkt mb, und dasselbe gilt natürlich auch von dem gesamten Zuge, den ein beschleunigt nach abwärts bewegter und dabei irgendwie aufgehängter Körper auf seine Aufhängevorrichtung ausübt. Dies läßt sich sehr schön mittels eines

*) Die Rolle (R) wird dabei auf einen Vorsprung gestellt, so daß die Gewichte nicht (wie in Fig. 42) neben, sondern vor der Säule hinabhängen. Eine Hebung eines Gewichtes um 1 cm schafft ein Übergewicht, das dem Gewicht von 2 cm des Kettchens gleich ist.

von **Poggendorff***) (1854) erfundenen Apparates zeigen, der in einer durch **Mach****) verbesserten Form in Fig. 44 wiedergegeben ist.

Die **Poggendorff**sche Fallmaschine oder, wie sie auch genannt wird, **Poggendorff**sche Wage, trägt an den beiden Enden zwei Rollen a und c (vgl. Fig. 45); über die Rolle c wird ein Faden gelegt und einerseits mit einem Gewicht P, andererseits mit dem Gewicht P + p belastet, das man durch einen anderen dünnen Faden an der Achse der Rolle festbindet. Hängt man bei a Gewichte im Gesamtbetrage (2P + p) auf, so besteht natürlich Gleichgewicht. Wenn man aber den Faden durchbrennt, mit dem bis dahin das Gewicht P + p an der Rolle c befestigt war, und wenn somit dieses Gewicht zu sinken beginnt, so zeigt sich sofort ein **Ausschlag** der Wage. Da die Senkung des einen Gewichtes P durch eine genau gleiche Steigung des anderen gleichen Gewichtes kompensiert wird, ist die **scheinbare Gewichtsverminderung** bestimmt durch das Produkt aus der Masse des Übergewichtes p und seiner Beschleunigung. Nennen wir also den scheinbaren Gewichtsverlust Q, so ist

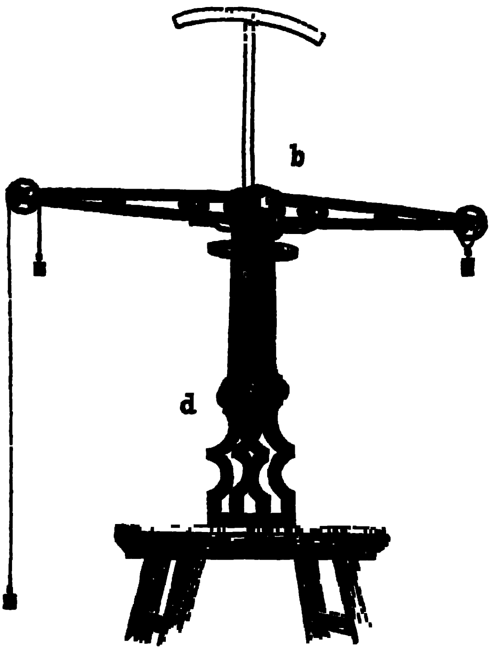


Fig. 44. Die **Poggendorff**sche Fallmaschine.

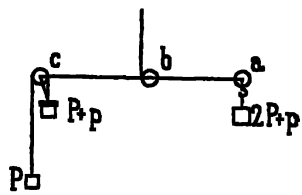


Fig. 45.

$$Q = \frac{p^2}{2P + p}. \tag{58}$$

In der Tat besteht an der Wage, wofern man sie vorher arretiert und erst bei dem Durchbrennen des Fadens auslöst, Gleichgewicht, wenn man das Gewicht bei a um die Größe Q vermindert.

---

*) Pogg. Ann. Bd. 92 (1854), S. 179.
) Vgl. **Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung.

Eine Variation des besprochenen Versuches ist in Fig. 46 dargestellt. Man führt über die Rolle a einen Faden und belastet ihn einerseits mit einem Gewicht; andererseits führt man ihn über die Rollen b und d und bindet ihn bei m fest. Jeder Zug, der bei m auf den Faden ausgeübt wird, hat dann, wie das Experiment zeigt, ein sofortiges Sinken des Wagbalkens bei a zur Folge. Denn die Wirkung ist dieselbe, wie wenn bei einem schweren Körper die Unterlage, auf die er drückt, eine Aufwärtsbeschleunigung erfährt, was eben eine scheinbare Gewichtsvermehrung herbeiführt. Umgekehrt steigt der Wagbalken sofort bei a, wenn der Faden gelockert wird. Eine direkte Einwirkung auf die Wage ist natürlich in beiden Fällen ausgeschlossen, weil ja die Richtung des Fadens (bd) durch die Achse der Wage hindurchgeht.

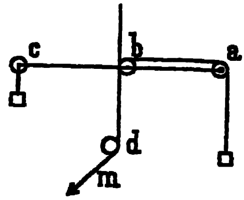


Fig. 46.

§ 48. Die Fallmaschine von Morin.

Während bei der Atwoodschen Fallmaschine die exakte Untersuchung der Fallbewegung durch deren künstliche Verlangsamung ermöglicht wird, ermöglichen dies andere Apparate durch Verfeinerung der Beobachtungsmittel. Der älteste derartige Apparat stammt wohl von Morin (1841)*). Bei diesem Apparat fällt ein kleiner, mit einem Schreibstift versehener Körper zwischen zwei Führungsleisten, während die Schreibfläche in horizontaler Richtung mit konstanter Geschwindigkeit bewegt wird. Die durch den Schreibstift gezeichnete Kurve stellt die Fallräume in ihrer Abhängigkeit von der Fallzeit dar, da ja die Fallräume die vertikalen Ordinaten, die Fallzeiten aber die horizontalen Abszissen der Kurve bilden. Die Experimente ergeben als Kurve stets eine halbe Parabel mit vertikaler Achse; aus der bekannten Gleichung der Parabel folgt daher die Proportionalität zwischen Fallraum und Zeitquadrat und somit der experimentelle Beweis der gleichförmigen Beschleunigung der Fallbewegung.

§ 49. Die Methode des schwingenden Schreibstifts.

Statt den Schreibstift mit dem fallenden Körper zu verbinden, kann man auch einen in horizontaler Richtung bewegten Schreibstift eine Kurve auf einer fallenden Schreibfläche verzeichnen lassen; die zweckmäßigste horizontale Bewegung des Schreibstiftes erhält man wiederum, wenn man ihn durch eine elastische Feder in horizontale Schwingungen versetzt. Auf diesem Prinzip beruhen mehrere Apparate, die ihre Erfinder unabhängig von-

*) Vgl. Jamin, Cours de physique (1858), Bd. I, S. 46.

einander um das Jahr 1860 ersonnen haben; es sind Apparate von Laborde, Lippich u. a.*).

Ein derartiger Apparat, bei dem eine berußte Glasschiene als vertikal fallende Schreibfläche verwendet wird, ist durch Fig. 47 dargestellt. Würde sich die Schreibfläche gleichförmig bewegen, so würde der Schreibstift natürlich eine sogenannte Sinuslinie oder Wellenlinie aufzeichnen. Wenn aber die Bewegung ungleichförmig

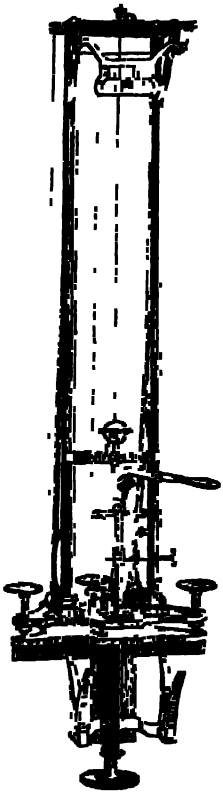
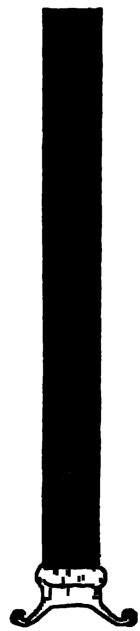

Fig. 47.



Fig. 48.


Fig. 49.

ist, und zwar gleichförmig beschleunigt, so führt die geometrische Konstruktion zu einer Kurve von der Art, wie sie in Fig. 48 dargestellt ist. Die Strecken ab, ac, ad, ae, die die Fallräume nach Ablauf der ersten vier Halbschwingungen des Schreibstiftes darstellen, müßten sich dann wie 1 : 4 : 9 : 16 verhalten.

Eine tatsächlich experimentell erhaltene Kurve ist durch Fig. 49 wiedergegeben. Es zeigt sich in der Tat volle Übereinstim-

*) Vgl. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung.

mung zwischen geometrischer Konstruktion und experimentellem Befund, und die Messungen ergeben die genaue Bestätigung der Beziehung, wonach die von dem Anfang bis zu den einzelnen Schnittpunkten gemessenen Strecken sich wie die Quadrate der ganzen Zahlen verhalten. Ist die Schwingungsdauer des Schreibstiftes ermittelt, so kann aus derartigen Kurven auch die Beschleunigung des freien Falls errechnet werden.

§ 50. Der Einfluß des Luftwiderstandes auf den freien Fall.

Der Fallbewegung der schweren Körper wirkt in der Natur stets der Luftwiderstand entgegen, der eingehender allerdings erst in einem späteren Kapitel innerhalb der Aerodynamik zu besprechen sein wird. Der Luftwiderstand verkleinert die Fallräume gegenüber den aus der Theorie bei bekanntem Wert der Fallbeschleunigung errechneten Strecken. Die Größe der Abweichung hangt aber nicht nur von Eigenschaften der Luft ab, wie von deren Dichte, sondern auch von der Dichte der fallenden Körper und vor allem von deren Gestalt. Die Verzögerung ist um so großer, je größer die Oberfläche des fallenden Körpers im Verhältnis zu seinem Volumen ist; denn der Widerstand hängt von der Oberfläche, die Größe der Schwerkraft aber von dem Volumen ab. Vor allem aber ist der Widerstand eine Funktion der vorhandenen Geschwindigkeit, mit der er wächst. Für das Wachstum läßt sich kein allgemeines Gesetz angeben; zumindest ist aber der Widerstand der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional.

Wenn nun der Luftwiderstand mit der Geschwindigkeit zunimmt, so muß er bei Erreichung einer bestimmten Geschwindigkeit, deren Wert sowohl von Eigenschaften der Luft als auch von solchen des fallenden Körpers abhängt, ebenso groß werden wie das Gewicht des fallenden Körpers. Von diesem Augenblick an muß sich der Körper so verhalten, als ob überhaupt keine Kraft auf ihn wirken würde; er muß mit der erlangten Endgeschwindigkeit seine Bewegung gleichförmig fortsetzen.

Für Regentropfen wurde beispielsweise diese Endgeschwindigkeit zu etwa 8 m/sec ermittelt, so daß ein fallender Regentropfen bereits nach ungefähr 1 Sekunde seine Endgeschwindigkeit erlangt. Für eine schwere Granate, die wegen ihres Gewichtes und ihrer spitzen Form den Luftwiderstand besonders leicht überwindet, dürfte die Endgeschwindigkeit einige hundert Meter in der Sekunde betragen; eine solche Geschwindigkeit würde nach Ablauf von etwa 10—30 Sekunden und nach Zurücklegung einer Fallstrecke von einigen Kilometern erlangt sein.

§ 51. Der Fall auf der schiefen Ebene.

Ebensowohl wie an der Atwoodschen Fallmaschine kann eine verlangsamte Fallbewegung auch an der schiefen Ebene untersucht werden, und in der Tat waren es Beobachtungen an der schiefen Ebene, die Galilei zu der Entdeckung der Fallgesetze führten. Am einfachsten lassen sich an der schiefen Ebene die Fallgesetze mittels des in Fig. 50 wiedergegebenen Apparates demon-



Fig. 50. Fall auf der schiefen Ebene.

strieren. Er besteht aus einer zweiteiligen Rinne; der eine Teil (ab) kann mittels eines unterlegten Bretts beliebig geneigt werden, der andere Teil (bc) ist horizontal. Auf dem ersten Teil sind von b aus Teilstriche bei 1, 4 und 9 dm gezeichnet, auf dem zweiten, horizontalen Teil bei 2, 4, 6 und 8 dm.

Man gibt nun zweckmäßig der Rinne eine solche Neigung, daß der Fallraum der ersten Sekunde einen Dezimeter beträgt. Man stellt sodann den Klotz K auf den Nullpunkt der Teilung bei b ein und läßt bei einem Schlage eines Sekundenpendels mittels des Brettes L eine kleine Kugel entweder bei dem Teilstrich 1 oder 4 oder 9 los. Man hört in diesen Fällen bei dem nächsten oder zweit- oder drittnächsten Sekundenschlag das Anschlagen der rollenden Kugel an den Klotz, womit die Proportionalität zwischen Fallraum und Zeitquadrat erwiesen ist*).

Andererseits läßt sich auch leicht zeigen, daß die Fallgeschwindigkeiten den Fallzeiten proportional sind und die Geschwindigkeit nach Ablauf der ersten Sekunde numerisch doppelt so groß ist wie die in der ersten Sekunde zurückgelegte Fallstrecke. Läßt man die Kugel wieder von den Teilstrichen 1, 4 oder 9 los, und stellt man in diesen drei Fällen auf dem horizontalen Teil den Klotz entweder zu 2 oder 4 oder 6, so langt in jedem dieser drei Fälle die

*) Sehr zweckmäßig ist auch der Gebrauch eines Metronoms, weil man dabei eine veränderliche Zeiteinheit den Versuchsbedingungen anpassen kann.

Kugel bei dem Klotz um 1 Sekunde später als in b an, also um 2 oder 3 oder 4 Sekunden später, als sie losgelassen wurde.

Wie bei jeder gleichförmig beschleunigten Bewegung, so hängt auch bei der Bewegung auf der schiefen Ebene die Geschwindigkeit v mit dem zurückgelegten Weg s durch die Beziehung zusammen

$$v = \sqrt{2bs}, \tag{59}$$

wenn b die Beschleunigung ist (diese Gleichung folgt ohne weiteres aus den beiden Gl. 10). Nun ist bei der schiefen Ebene die Beschleunigung gleich g sin α, wenn wir den Neigungswinkel mit α bezeichnen, und andererseits ist, wenn wir die Fallhöhe h nennen,

$$h = s \sin\alpha. \tag{60}$$

Es ist also

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{61}$$

Genau dieselbe Formel gilt aber auch für den freien Fall, für den sich ja die Begriffe Fallraum und Fallhöhe decken. Bei einer Bewegung längs einer schiefen Ebene ist also die erlangte Geschwindigkeit stets ebenso groß, wie sie bei dem freien Fall durch den zurückgelegten Höhenunterschied wäre. Von der Neigung der schiefen Ebene ist somit bei gleichem Höhenunterschied die erlangte Endgeschwindigkeit unabhängig*).

Auch dieser Satz läßt sich leicht mittels des vorhin beschriebenen Apparates experimentell nachweisen. Man gibt der schiefen Rinne zwei verschiedene Neigungen, läßt aber in beiden Fällen die Kugel den gleichen Höhenunterschied durchlaufen. In der Tat stellt man dann fest, daß in beiden Fällen in der Zeit zwischen zwei Sekundenschlägen gleich große Strecken im horizontalen Teil der Rinne durchlaufen werden.

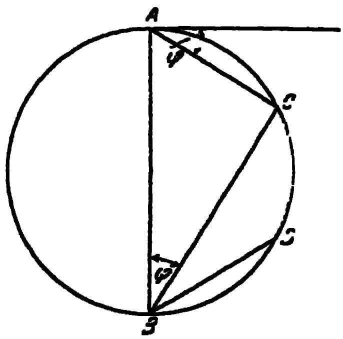


Fig. 51.

Von theoretischen Folgerungen, die Galilei aus den Fallgesetzen für die schiefe Ebene abgeleitet hat, sei nur noch der sogenannte Satz vom Fall durch die Sehne erwähnt. Errichten wir in einem Kreise einen vertikalen Durchmesser AB, und legen wir durch dessen einen Endpunkt eine beliebige Sehne AC, die unter einem Winkel φ gegen die Horizontale geneigt sei (Fig. 51), so ist die Strecke AC

*) Dieser Satz ergibt sich auch als eine spezielle Folgerung aus der Tatsache, daß die Schwerkraft ein Potential besitzt, dessen Niveauflächen horizontale Ebenen sind.

nach einer elementaren geometrischen Beziehung gleich AB · sin φ (denn der Winkel ACB ist ein rechter und der Winkel ABC ist gleich dem Winkel φ, weil seine Schenkel auf den Schenkeln dieses Winkels senkrecht stehen). Andererseits ist aber bei einer Abwärtsbewegung durch die Strecke AC die Beschleunigung gleich g sin φ, und somit wird die Strecke AC bei einer Abwärtsbewegung in derselben Zeit durchlaufen wie der Durchmesser AB. Dasselbe gilt natürlich auch für die beliebig gelegte Sehne DB; denn auch sie ist gleich dem Durchmesser, multipliziert mit dem Sinus des Winkels, unter dem die Sehne DB gegen die Horizontale geneigt ist. Es gilt also ganz allgemein der Satz, daß von einer Stelle A aus ein Körper in einer bestimmten Zeit, in der er in freiem Falle bis zu einem Punkte V gelangen würde, auf einer beliebig geneigten schiefen Ebene bis zu der Stelle gelangt, in der diese schiefe Ebene von einem Kreise geschnitten wird, der die Strecke AV zum vertikalen Durchmesser hat (Fig. 52); umgekehrt gelangen auch in derselben Zeit auf den entsprechenden schiefen Ebenen Körper von diesen Schnittpunkten zu dem Punkte V.

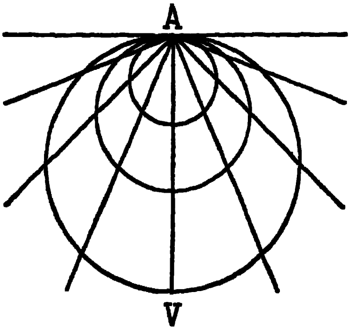


Fig. 52.

Der Satz vom Fall durch die Sehne läßt sich experimentell mittels des in Fig. 53 wiedergegebenen Apparates demonstrieren. Er besteht aus einer Holzsäule (ab) von etwa 80 cm Höhe und aus zwei schiefen Fallrinnen (cd und db), die in c und b mittels Scharnieren drehbar sind. Mittels einer Schraube werden die beiden Rinnen in d aneinander geklemmt, aber derart, daß sie miteinander stets einen rechten Winkel einschließen. Werden zwei kleine Kugeln nun gleichzeitig in a und c losgelassen, so langen sie gleichzeitig in b am Boden und in d

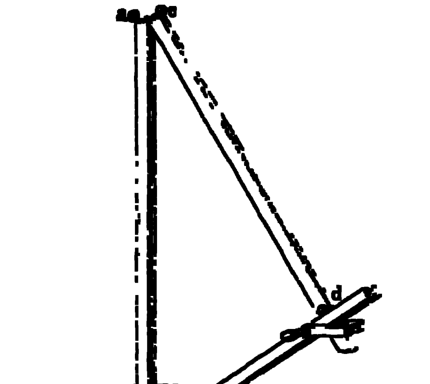


Fig. 53. Fall durch die Sehne.

an. Läßt man andererseits gleichzeitig eine Kugel bei a und eine bei d los, so kommen sie ebenfalls gleichzeitig in b an, wie es das Galileische Theorem verlangt.

§ 52. Der Fall auf der Zykloide.

Auf den Fall längs einer schiefen Ebene läßt sich stets die Abwärtsbewegung in einer beliebig gekrümmten Bahn zurückführen, weil wir uns diese immer aus geradlinigen kleinen Strecken zusammengesetzt denken können. Von besonderem theoretischem Interesse ist die Abwärtsbewegung längs einer Zykloide, jener schon (in § 11) erwähnten Kurve, die ein Punkt des Umfanges eines Kreises beschreibt, der längs einer Geraden rollt.

Ist AB ein solcher halber Zykloidenbogen (Fig. 54). und sind C und D zwei beliebige Punkte dieses Bogens, so zeigen mathematische Überlegungen, daß ein schwerer Körper dieselbe Zeit braucht, um von A oder C oder D nach B zu gelangen. Wohl sind in diesen drei Fällen die zu durchlaufenden Strecken verschieden; aber verschieden ist eben auch die anfängliche Neigung der Bahn, und je steiler diese ist, eine desto großere Geschwindigkeit erlangt der fallende Körper im Beginn der Bewegung. Die Zykloide ist also, wie zuerst Huygens (1673) fand, die Kurve gleicher Fallzeiten oder, wie man auch sagt, die Tautochrone*). Es sei nur nebenbei bemerkt, daß, wie Johann Bernoulli fand, die Zykloide zugleich auch die Kurve der kürzesten Fallzeit, die sogenannte Brachystochrone ist. Die Kurve, längs deren in der kürzesten Zeit ein schwerer Körper von einem Punkte A zu einem tiefer gelegenen Punkte B gelangt, ist stets eine durch beide Punkte gehende Zykloide von bestimmten Eigenschaften**).

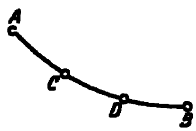


Fig. 54.

§ 53. Der Fall durch den Kreisbogen.

Auf den Fall längs einer schiefen Ebene kann auch die Abwärtsbewegung eines schweren Körpers durch einen Kreisbogen zurückgeführt werden. Ist O der Mittelpunkt des Kreises, A der tiefste Punkt des Bogens und P der Punkt, von dem aus der Korper seine Abwärtsbewegung beginnt, so wollen wir mit α den Winkel POA bezeichnen (Fig. 55). Für die Zeit der Abwärtsbewegung von P bis A ergibt dann die Theorie, wenn wir den Kreisradius mit r bezeichnen, den Wert

*) Auf Griechisch heißt Tautos der gleiche und Chronos die Zeit.

**) Näheres hierüber z. B. in Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik (4. Auflage, Leipzig, 1901), Bd. IV, § 10.

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\varphi}}. \tag{62}$$

Das Integral dieser Gleichung ist ein sogenanntes elliptisches Integral, dessen Wert für gegebene Winkel α in den Tafeln der sogenannten elliptischen Funktionen nachgeschlagen werden kann. Für $\alpha = 0$ wird das Integral gleich $\pi/2$. Wie es für größere Werte von α wächst, ist aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

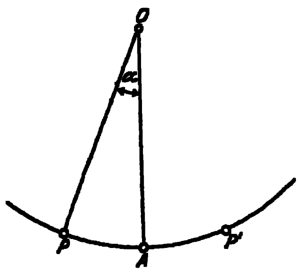


Fig. 55.

Tabelle I.

Winkel in °	Integral
5	1,5715
10	1,5738
20	1,5828
40	1,6200
60	1,6858
90	1,8541
120	2,1565
150	2,7681
180	∞

Die Gl. 62 läßt sich auch in der Form einer Reihe folgendermaßen schreiben:

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cdots\right] \tag{63}$$

Für kleine Winkel läßt diese Formel noch wesentliche Vereinfachungen zu. Zunächst einmal kann dann der Sinus des Winkels durch den im Bogenmaß ausgedrückten Winkel selbst ersetzt werden. Wie gering hierbei der Unterschied ist, zeigt die folgende Tabelle:

Tabelle II.

Winkel in °	Winkel im Bogenmaß	Sinus des Winkels
1	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03490
3	0,05236	0,05234
4	0,06981	0,06976
5	0,08727	0,08716

Für kleine Winkel folgt somit aus der Gl. 63 die Näherungsformel

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \left[1 + \frac{\alpha^2}{16} \right]. \qquad (64)$$

Für minder genaue Berechnungen kann bei kleinem Winkel auch die Formel genügen

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}. \qquad (65)$$

Der Fehler, der hierbei begangen wird, beläuft sich, wie aus der früheren Tabelle ersichtlich ist, bei einem Winkel von 1° auf etwa zwei tausendstel Prozent, bei einem Winkel von 2° auf etwa ein hundertstel Prozent und erst bei einem Winkel von 5° auf etwa ein halbes Promille.

Fünftes Kapitel.

Die Pendelbewegung.

§ 54. Das mathematische Pendel.

Unter einem Pendel verstehen wir einen jeden aufgehängten schweren Körper, der unter dem Einfluß seines Gewichtes schwingende Bewegungen ausführt. Wenn im besonderen die Masse des schweren Körpers in einem einzigen Punkte konzentriert gedacht und die Masse der Aufhängevorrichtung neben der des aufgehängten Körpers vernachlässigt werden kann, so sprechen wir von einem mathematischen Pendel oder auch von einem Fadenpendel. Ein solches kann als ein an einem masselosen Faden aufgehängter Massenpunkt aufgefaßt werden.

In der Ruhelage des Pendels hat der Faden natürlich eine vertikale Richtung, in jeder anderen Lage weicht er von der Vertikalen um einen Winkel ab, der als Elongationswinkel bezeichnet wird. Wird das Pendel aus seiner Ruhelage entfernt und dann unter Vermeidung jedes seitlichen Impulses losgelassen, so kehrt das Pendel in einem Kreisbogen in seine Ruhelage zurück. Da es aber diese mit einer endlichen Geschwindigkeit passiert, die es durch das Hinabfallen erlangt hat, so setzt es infolge seines Beharrungsvermögens die Bewegung als Aufwärtsbewegung längs des Kreisbogens auf der anderen Seite so lange fort, bis seine Geschwindigkeit null geworden ist. Bei dem Fehlen von Bewegungshindernissen ist dies in einem Punkte P′ der Fall, der in derselben Horizontalen wie der Ausgangspunkt P der Bewegung liegt und um einen ebenso langen Kreisbogen wie dieser von der Ruhelage A entfernt ist (vgl. die frühere Fig. 55). Ist der Punkt P′ erreicht, so kehrt das Pendel seine Bewegung um, es gelangt fallend wieder nach der Ruhelage A

und passiert diese mit einer Geschwindigkeit, die es instand setzt, wieder bis zu dem Punkte P emporzusteigen, worauf sich der ursprüngliche Vorgang wiederholt.

Die Periode dieses schwingenden Vorgangs, also seine Schwingungsdauer, ist offenbar viermal so groß wie die Zeit, die nach § 53 der Massenpunkt zum Fall durch den Bogen PA braucht. Für die Schwingungsdauer gilt demnach die Beziehung

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right), \tag{66}$$

wenn l die Pendellänge, d. h. die Fadenlänge bedeutet und α den größten, also den anfänglichen Elongationswinkel, der die Amplitude darstellt. Ist die Amplitude klein, so ist in weiterer Vereinfachung nach Gl. 65 die Schwingungsdauer durch die Formel bestimmt

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{67}$$

Diese Formel läßt sich auch leicht unabhängig von den Betrachtungen des § 53 ableiten, wofern der Elongationswinkel genügend klein ist. Wir können nämlich die an dem Pendel angreifende Schwerkraft immer in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegen, eine in der Richtung des Fadens und eine senkrecht dazu. Jene sei in Fig. 56 durch die Strecke EM, diese durch die Strecke EN und die Schwerkraft durch die Strecke EF dargestellt. Bezeichnen wir den Elongationswinkel mit φ, so ist die erste Komponente mg cos φ, die zweite mg sin φ. Die erste Komponente wird durch die Spannung des Fadens aufgehoben, so daß nur die zweite wirksam bleibt. Ist nun der Elongationswinkel so klein, daß sein Sinus durch den im Bogenmaß ausgedrückten Winkel ersetzt werden kann, so wird die Tangentialkomponente der Schwerkraft näherungsweise gleich mg φ und daher die Beschleunigung gleich g φ.

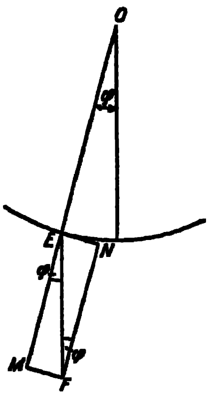


Fig. 56.

Andererseits ist die Entfernung aus der Ruhelage gleich l sin φ, also näherungsweise bei kleinem Elongationswinkel l φ. Nennen wir die Beschleunigung b und die Entfernung von der Ruhelage x, so gilt also die Beziehung

$$b = -\frac{g}{l} x; \tag{68}$$

das negative Vorzeichen ist hierbei deshalb zu wählen, weil die Entfernung x von der Ruhelage weg gerechnet wird, während die Beschleunigung zu der Ruhelage hin gerichtet ist. Aus den Gl. 14 und 25 früherer Abschnitte wissen wir aber, daß die Gl. 68 eine schwingende Bewegung bedeutet, deren Schwingungsdauer gleich ist 2π mal der Quadratwurzel aus l/g, so wie dies eben die Gl. 67 zum Ausdruck bringt.

§ 55. Die experimentelle Bestätigung der Pendelgesetze.

Die für die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels abgeleiteten Formeln enthalten drei sogenannte **Pendelgesetze**, die bereits **Galilei** um das Jahr 1580 aufgefunden hat und die folgendermaßen ausgesprochen werden können:

1. Die Schwingungsdauer eines Pendels ist völlig **unabhängig von dem Gewicht und der stofflichen Beschaffenheit des Pendels.**

2. Bei **kleinen Elongationen** ist die Schwingungsdauer nahezu **unabhängig von der Amplitude.**

3. Bei verschiedener Fadenlänge ist die **Schwingungsdauer der Quadratwurzel aus der Pendellänge proportional.**

Das erste Gesetz ist eine notwendige Folge des Satzes, wonach alle Körper gleich schnell fallen; denn die Pendelbewegung kann ja auf den Fall längs einer schiefen Ebene zurückgeführt werden. Umgekehrt können wir wiederum in Pendelbeobachtungen einen Beweis für den Satz vom gleich schnellen Fall aller Körper erblicken.

Um das erste Pendelgesetz experimentell zu prüfen, hat **Newton** hölzerne Hohlkugeln an gleich langen Fäden aufgehängt und sie mit den mannigfachsten Stoffen, wie „Gold, Silber, Blei, Glas, Sand, Kochsalz, Holz, Wasser und Weizen" gefüllt. Obwohl ein Unterschied in der Schwingungsdauer von etwa 1 Promille bei **Newtons** Versuchen feststellbar gewesen wäre, konnte er keine Abweichung bei den verschiedenartigen Pendeln beobachten*). Genauer wurden **Newtons** Versuche durch **Bessel** (1830) wiederholt. der innerhalb einer Fehlergrenze von nur $^1/_{100000}$ **Newtons** Ergebnis bestätigte**).

Mittels eines einfachen Experimentes demonstriert man das erste Pendelgesetz, indem man an drei gleich langen Fäden etwa eine größere und eine kleinere Bleikugel und überdies eine Wachskugel aufhängt. Man bestimmt ihre Schwingungsdauern, indem man die

*) Princip. math., III. Buch, Cap. I.

**) „Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht."

Zahl der Hin- und Hergänge zwischen bestimmten Sekundenschlägen zählt. Man überzeugt sich dann leicht davon, daß bei beliebigen, jedoch genügend kleinen Amplituden alle drei Pendel dieselbe Schwingungsdauer haben, womit außer dem ersten auch das zweite Pendelgesetz experimentell bestätigt erscheint.

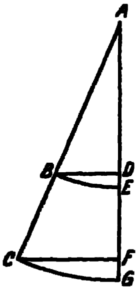


Fig. 57.

Das dritte Pendelgesetz ergibt sich, wie schon Galilei erkannte, ohne weiteres aus der Beziehung, wonach bei dem freien Fall und ebenso bei dem Fall auf einer schiefen Ebene die Fallzeit proportional ist der Quadratwurzel aus der Fallhöhe. Diese Beziehung muß natürlich auch für die Pendelbewegung anwendbar sein; bei verschieden langen Pendeln AB und AC (Fig. 57) müssen sich aber bei gleicher Amplitude die Fallhöhen DE und FG wie die Pendellängen verhalten.

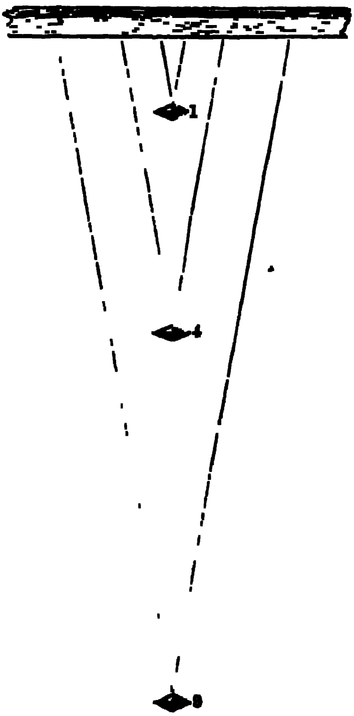


Fig. 58. Experimenteller Nachweis der Pendelgesetze.

Die experimentelle Bestätigung des dritten Pendelgesetzes nimmt man am einfachsten mittels des in Fig. 58 abgebildeten Apparates vor. An doppelten Fäden werden drei Pendel so aufgehängt, daß sich ihre Abstände von einer horizontalen Leiste wie 1 : 4 : 9 verhalten. Man überzeugt sich dann davon, daß das kürzeste Pendel zwei Schwingungen während einer Schwingung des mittleren und drei Schwingungen während einer Schwingung des längsten Pendels ausführt.

Mittels eines einfachen Apparates läßt sich auch leicht zeigen, daß in der Tat bei einer Pendelbewegung die Entfernung von der Ruhelage eine Sinusfunktion der Zeit ist. Man hängt dazu an zwei langen Fäden etwa von der Zimmerdecke ein trichterförmiges Gefäß auf, das unten eine kleine Öffnung hat und das mit Sand gefüllt wird. Wird nun senkrecht zu der Schwingungsebene ein ebenes horizontales Brett mit konstanter Geschwindigkeit unter dem Pendel, während

es mit kleinen Elongationswinkeln*) schwingt, weggezogen, so zeichnet der aus der Öffnung ausfließende Sand auf dem Brett in der Tat eine Sinuskurve auf.

§ 56. Das Sekundenpendel.

Ein Pendel, das zu einer halben Schwingung eine Sekunde braucht**), also eine Schwingungsdauer von 2 Sekunden hat, wird als Sekundenpendel bezeichnet; seine Länge ergibt sich aus Gl. 67 zu

$$l^* = \frac{g}{\pi^2}. \qquad 69)$$

Da für g ungefähr 980 einzusetzen ist (bei Benutzung des Zentimeters als Längeneinheit) und π^2 ungefähr gleich 9,87 ist, so beträgt die Länge des Sekundenpendels angenähert 1 Meter.

Die erste Bestimmung der Länge des Sekundenpendels geht auf Mersenne (1644) zurück. Einige Jahrzehnte später gab eine Beobachtung von Richer den Anlaß zu der wichtigen Entdeckung, daß die Länge des Sekundenpendels von der geographischen Breite abhängt. Richer war damals in Cayenne, um dort Arbeiten für eine Gradmessung vorzunehmen, und da stellte er nun fest, daß seine Pendeluhr an diesem in der Nähe des Äquators gelegenen Orte (5° n. Breite) täglich um $2^1/_2$ Minuten zurückblieb, obwohl sie in Paris (bei ungefähr 49° n. Breite) vollkommen richtig gegangen war. Richer mußte deshalb das Pendel um etwa 3 mm verkürzen. Als er nach Paris zurückkehrte, ging die Uhr wiederum um $2^1/_2$ Minuten täglich vor, bis er das Pendel um 3 mm verlängerte, worauf der normale Gang wiederhergestellt war. Nachdem zunächst als Ursache der Erscheinung die Temperaturverschiedenheit in Cayenne und Paris angenommen worden war, erkannten Newton und Huygens die richtige Ursache in der Verschiedenheit der Fallbeschleunigung an beiden Orten.

§ 57. Das Pendel als Zeitmesser.

Huygens, dem wir die Aufstellung der Formel für die Schwingungsdauer des Pendels verdanken, hat auch die für das praktische Leben wichtigste Anwendung erfunden, die der Isochronismus

*) Um kleine Elongationswinkel trotz genügend großen Entfernungen von der Ruhelage zu erzielen, wählt man eben die Pendellänge so groß wie möglich.

**) In der älteren physikalischen Literatur wurde häufig unter einer Schwingung die Zeit zwischen zwei Durchgängen durch die Ruhelage verstanden. Die derart definierte Schwingungsdauer ist daher halb so groß wie die Größe, die heute gewöhnlich darunter verstanden wird.

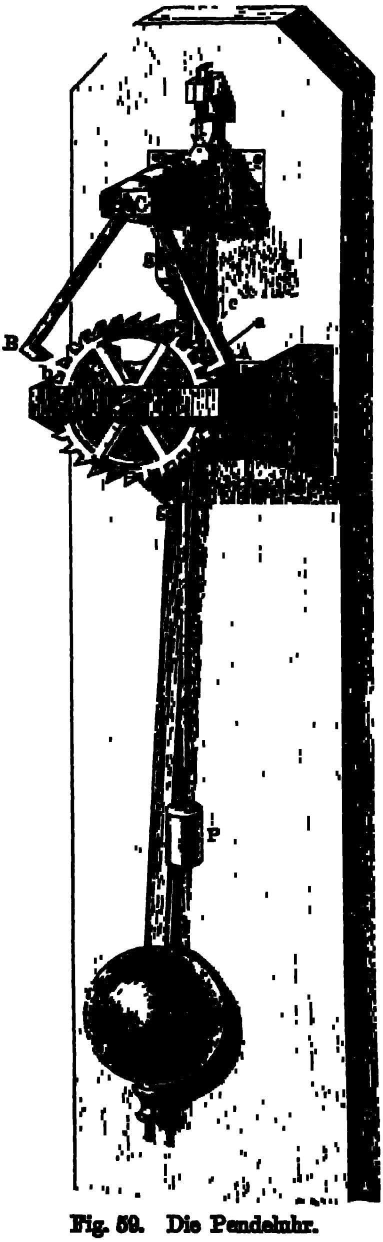


Fig. 59. Die Pendeluhr.

der Pendelschwingungen zuläßt, indem er das Pendel zum Zeitmesser ausgestaltete*). Huygens verband zu diesem Zweck die schon von älteren Uhrkonstruktionen her bekannt gewesene Vorrichtung des in ein Steigrad eingreifenden Ankers mit einem schwingenden Pendel.

Der wesentlichste Teil der von Huygens im Jahre 1657 erfundenen Pendeluhr ist in Fig. 59 dargestellt. Es ist zunächst der mit dem Pendel fest verbundene Anker ACB; er greift abwechselnd in die Zähne eines Zahnrades, um dessen Welle eine an dem einen Ende mit dem Gewicht P belastete Schnur geschlungen ist. Dieses Gewicht sucht das Zahnrad in dem durch den weißen Pfeil angedeuteten Sinne zu drehen, und es würde eine beschleunigte Umdrehung hervorrufen, wenn nicht die Drehung des Zahnrades immer wieder durch den mit dem Pendel schwingenden Anker gehemmt würde.

Die Fig. 59 stellt die Pendeluhr in dem Augenblick dar, in dem das Pendel eben seinen größten Ausschlag nach der linken Seite erreicht hat. In diesem Augenblick ist das Rad gehemmt, weil der Haken A des Ankers den Zahn a an der Weiterbewegung hindert. Wenn nun aber das Pendel von links nach rechts zu schwingen beginnt, so weicht der Ankerhaken A zurück, und an der abgeschrägten Endfläche des

*) Einen Vorläufer hatte Huygens allerdings bereits in Galilei.

Ankerhakens gleitet der ebenfalls abgeschrägte Zahn a hinweg. In demselben Augenblick schiebt sich aber auch schon (da die Länge der Ankerhaken und die Höhe der Zähne einander angepaßt sind) der andere Ankerhaken B vor den Zahn b und hindert derart das Zahnrad an einer weiteren Bewegung. Erst wenn das Pendel auf der rechten Seite umgekehrt ist und sich wiederum, nunmehr von dieser Seite, der Ruhelage nähert, gleitet der Zahn b an dem linken Ankerhaken hinweg. Dadurch wird abermals für einen Augenblick das Rad frei, aber nur, um sofort wieder dadurch gehemmt zu werden, daß sich nun der rechte Haken vor den Zahn c legt, der auf den früher betrachteten Zahn a folgt.

Bei jeder ganzen Schwingung (die sich also aus einem Hin- und einem Hergang zusammensetzt) rückt demnach das Rad um einen Zahn vor. Ist das Pendel ein Sekundenpendel und hat das Rad 30 Zähne, so durchläuft also ein mit dem Rad verbundener Sekundenzeiger innerhalb einer Minute einmal einen ganzen Kreisumfang. Durch andere Zahnräder überträgt sich die Bewegung des Sekundenzeigers auf einen 60 mal langsameren Minuten- und einen noch 12 mal langsameren Stundenzeiger. Fig. 60 stellt die Huygenssche Pendeluhr im Querschnitt dar.

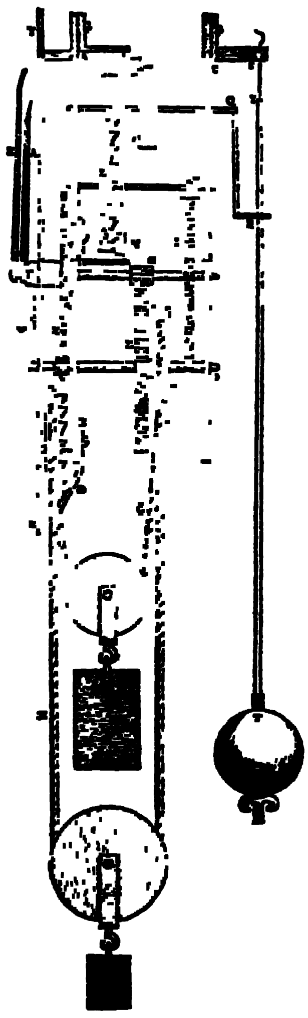


Fig. 60.
Die Pendeluhr von Huygens.

§ 58. Die Messung der Schwingungsdauer.

Um die Schwingungsdauer eines Pendels zu ermitteln, verfährt man am zweckmäßigsten so, daß man die Zeit zwischen zwei Augenblicken mißt, in denen das Pendel seine Ruhelage passiert. Wenn in dieser Zeit, die T Sekunden umfasse, z Durchgänge durch die Ruhelage erfolgen (wobei derjenige im Beginn der gemessenen Zeit nicht mitgezählt wird, wohl aber derjenige am Ende dieser Zeit), so ergibt sich die Schwingungsdauer zu $2\,T/z$ Sekunden. Es

ist vorteilhafter, die Durchgänge durch die Ruhelage zu beobachten, als die Umkehrungen, weil die Ruhelage mit der maximalen Geschwindigkeit passiert wird, wodurch eine viel schärfere Zeitbestimmung ermöglicht wird.

Um genauere Messungen der Schwingungsdauer vorzunehmen (was wegen der in dem nächsten Abschnitt zu besprechenden Anwendung wichtig ist), bedient man sich zweckmäßig der von Borda im Jahre 1792 ersonnenen Methode der sogenannten Koinzidenzen. Bei dieser Methode läßt man zugleich mit dem Pendel, dessen genaue Schwingungsdauer ermittelt werden soll, ein Pendel einer genau regulierten Uhr mitschwingen, das in einer Sekunde eine halbe Schwingung ausführt, also ein Sekundenpendel darstellt, ohne indessen ein „mathematisches" Pendel sein zu müssen. Die beiden Pendel werden gleichzeitig durch ein Fernrohr beobachtet, und dieses wird so eingestellt, daß sowohl das Bild des Pendelfadens als auch eines auf der Uhrpendellinse verzeichneten Striches gerade durch einen im Gesichtsfelde des Fernrohrs gespannten vertikalen Faden hindurchgeht, wenn die Pendel die Ruhelage passieren.

Es wird nun ein Augenblick abgewartet, in dem beide Pendel gleichzeitig durch den Fernrohrfaden hindurchzugehen scheinen, und von da ab die Zeit gemessen bis zu einem Augenblick, in dem wiederum eine Koinzidenz eintritt, etwa zum p-ten Male seit dem erwähnten, zuerst beobachteten Eintritt. Beträgt diese Zeit n Sekunden, so ergibt sich durch eine einfache Überlegung die gesuchte Schwingungsdauer zu

$$\tau = \frac{2n}{n \pm p}; \tag{70}$$

dabei ist das Plus- oder Minuszeichen zu nehmen, je nachdem, ob das Pendel, dessen Schwingungsdauer ermittelt werden soll, schneller oder langsamer als das Sekundenpendel schwingt.

Am empfindlichsten ist die Methode der Koinzidenzen natürlich dann, wenn die zu ermittelnde Schwingungsdauer des Pendels nahezu 2 Sekunden beträgt oder ein ganzzahliges Vielfaches oder einen Bruchteil hiervon. Ist die Schwingungsdauer ungefähr 2s Sekunden oder 2/s, so vergleicht man s Schwingungen des Pendels mit einer des Sekundenpendels oder umgekehrt s des Sekundenpendels mit einer des Fadenpendels.

Bordas Messungsmethode ist in Fig. 61 wiedergegeben. Bei Bordas Beobachtungen war das Pendel an einer Mauer aufgehängt, an der auch die dem Vergleiche dienende Pendeluhr angebracht war. Das Fadenpendel hatte eine Länge von etwa 4 Metern, so daß es

zu einer halben Schwingung ungefähr 2 Sekunden brauchte, also halb so rasch wie das Sekundenpendel schwang. Als Schwingungskörper diente eine Platinkugel von ungefähr 36 mm Durchmesser.

Wurde bei diesen Versuchen von Borda das Pendel aus der Ruhelage um einen Elongationswinkel von 2° entfernt und dann losgelassen, so hielten die Schwingungen so lange an, daß sie durch

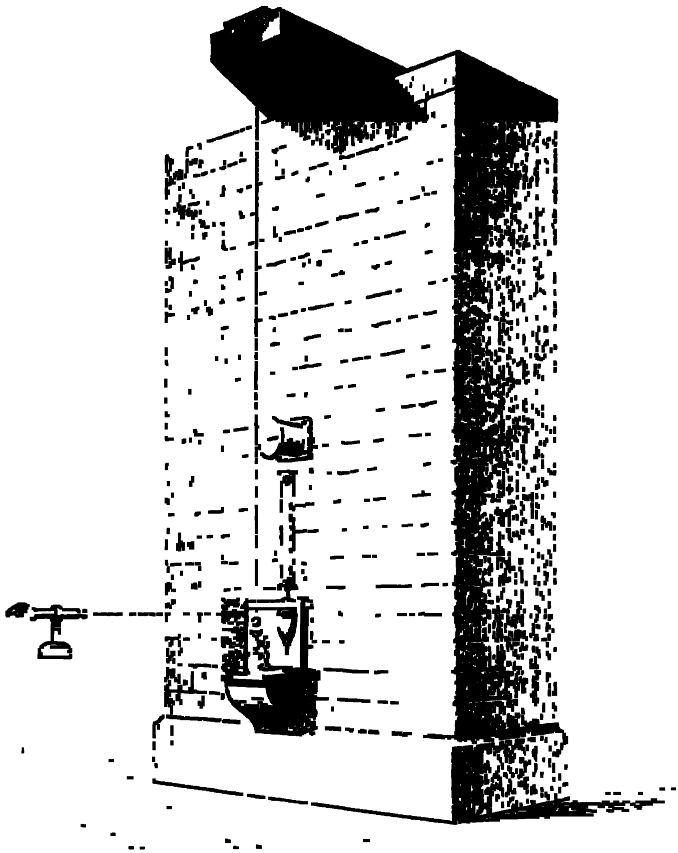


Fig. 61. Messung der Schwingungsdauer eines Pendels nach Borda.

4—5 Stunden bequem messend beobachtet werden konnten; doch waren noch nach 12 Stunden die Schwingungen deutlich erkennbar. Tabelle III zeigt, wie bei derartigen Versuchen die von der Vertikalrichtung aus in Bogenminuten gemessene Amplitude abnahm.

Die Koinzidenzen wurden bei Bordas Versuchen so festgestellt, daß auf der Linse des Uhrpendels zwei weiße, einander kreuzende Linien auf schwarzem Hintergrund gezogen wurden. Vor die beiden

Pendel wurde dann ein Schirm so gestellt, daß bei ruhenden Pendeln der Pendelfaden, der Vertikalstrich des Kreuzes und die eine Kante des Schirms im Fernrohr zusammenfielen. Verschwand nun etwa beim Beginn der Versuche zuerst der Faden hinter dem Schirm und dann erst das Kreuz, so wurde das Intervall zwischen dem Verschwinden der beiden Objekte immer kleiner, weil bei Bordas Versuchen eine Pendelschwingung etwas länger währte als zwei Schwingungen des Uhrpendels. Das Intervall verringerte sich, bis das Kreuz vor dem Pendelfaden verschwand; dann wurden die Intervalle wieder größer, um nach Erreichen eines Maximums neuerlich abzunehmen.

Tabelle III.

Zeit der Beobachtung	Amplitude	Zeit der Beobachtung	Amplitude
0^h	120,0′	7^h	4,1′
1^h	61,2′	8^h	2,7′
2^h	35,4′	9^h	1,8′
3^h	21,9′	10^h	1,2′
4^h	14,1′	11^h	0,8′
5^h	9,4′	12^h	0,5′
6^h	6,3′		

Tabelle IV zeigt, wie bei einem Intervall zwischen zwei Koinzidenzen von mehr als einer Stunde, Borda nach der Koinzidenzmethode die Zahl der Schwingungen, auf einen Tag bezogen, berechnete.

Tabelle IV.

Zeit zwischen zwei Koinzidenzen	Zahl der Schwingungen für 1 Tag	Korrektur wegen der Amplitude	Korrigierte Schwingungszahl
73^m 14^s	43805,28	+ 0,51	43805,79
73^m 30^s	43805,35	+ 0,14	43805,49
73^m 49^s	43805,44	+ 0,05	43805,49
72^m 34^s	43805,14	+ 0,02	43805,16

Nach vier solchen Intervallen wurden die Schwingungen zu schwach für exakte Messungen. Die erste Vertikalkolumne enthält die Zeit zwischen zwei Koinzidenzen, die zweite die errechnete Zahl der Schwingungen für einen Tag. In der dritten Kolumne sind die Korrekturen verzeichnet, die sich dadurch ergeben, daß die Schwingungszahlen, die ja aus Schwingungen von endlicher Amplitude errechnet wurden, auf „unendlich kleine“ Amplitude reduziert werden müssen;

infolge der kleinen Werte der Amplitude sind diese Korrekturen natürlich sehr geringfügig. Die vierte Kolumne enthält endlich die richtiggestellten Werte der Schwingungszahlen, wie sie sich aus den Beobachtungen in den vier Intervallen ergaben; als Mittelwert ergab sich 43 305,48 Schwingungen im Tag, von welchem Mittelwert die vier Einzelwerte nur um den 100 000sten Teil abweichen.

§ 59. Die Berechnung der Fallbeschleunigung aus Pendelbeobachtungen.

Gemäß der Formel für die Schwingungsdauer eines Fadenpendels ermöglichen genaue Messungen der Schwingungsdauer auch eine sehr genaue Bestimmung der Fallbeschleunigung; denn nach Gl. 67 ist

$$g = \frac{4\pi^2 l}{\tau^2}. \tag{71}$$

Zur Ermittlung des genauen Wertes von g ist also noch eine exakte Bestimmung der Pendellänge notwendig. Eine solche ist allerdings mit ziemlichen Schwierigkeiten verbunden, hauptsächlich wegen der Unsicherheit, die hinsichtlich der Lage des Aufhängepunktes immer besteht*). Man benutzt deshalb zweckmäßig eine Differenzmethode, die zuerst von Whitehurst ersonnen und dann vor allem von Bessel (1826) weiter ausgebildet wurde.

Bei dieser Methode verwendet man zwei ungleich lange, sonst jedoch gleich beschaffene Pendel und bestimmt, ohne sich um deren wirkliche Länge zu kümmern, nur deren Längenunterschied und deren Schwingungszeiten. Nennen wir diese τ_1 und τ_2 und die Längen der beiden Pendel l_1 und l_2, so finden wir, wenn wir die Gl. 67 quadrieren, für jedes der beiden Pendel anschreiben und sodann subtrahieren,

$$g = 4\pi^2 \frac{l_1 - l_2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}. \tag{72}$$

Durch die Schwingungsdauern der beiden Pendel und ihren Längenunterschied ist also in der Tat die Fallbeschleunigung bestimmt.

Bereits Borda vermochte mit großer Genauigkeit nach seiner Methode die Fallbeschleunigung für Paris zu 980,882 cm sec^{-2} zu ermitteln. Dem entspricht für Paris eine Länge des Sekundenpendels von 99,3827 cm. Bequemere und noch exaktere Methoden

*) Borda suchte diese Schwierigkeit durch Anwendung einer Schneide zu umgehen, an die er das obere Fadenende befestigte, während die Schneide selbst auf einer stählernen Platte auflag.

wurden später auf Grund der Theorie des sogenannten physischen Pendels ausgebildet; im Zusammenhang mit dem physischen Pendel sollen diese Methoden in einem späteren Abschnitt eingehender besprochen werden und ebenso die Fehlerquellen, die von dem Auftrieb der Luft, von deren Widerstand, von dem Mitschwingen der Luft, von dem Gewicht des Fadens und der Aufhängevorrichtung sowie von der endlichen Ausdehnung des Schwingungskörpers herrühren.

§ 60. Der Pendelapparat von Mach.

Daß die Schwingungsdauer eines Pendels der Quadratwurzel aus der Fallbeschleunigung umgekehrt proportional ist, läßt sich auch an einem und demselben Orte mittels eines einfachen, von Mach ersonnenen Apparates demonstrieren*). Bei diesem Apparat (Figg. 62 und 63) wird das Pendel durch geeignete

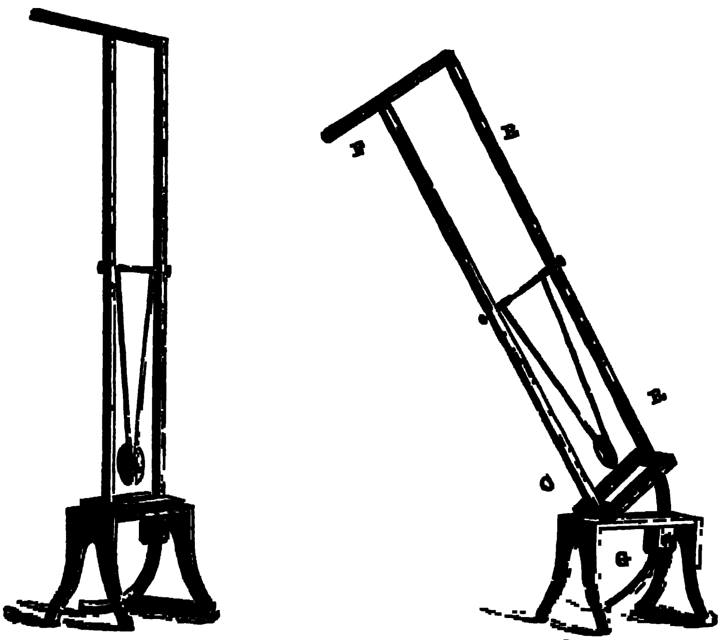


Fig. 62. Fig. 63.

Figg. 62 und 63. Der Pendelapparat von Mach.

starre Verbindungen gezwungen, in einer schiefen Schwingungsebene zu schwingen. Ein Rahmen RR, mit dem das starre Stangenpendel fest verbunden ist, ist um ein Scharnier bei C drehbar, so daß der Rahmen geneigt und umgelegt werden kann. Durch den mit

*) Vgl. E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung.

einer Schraube feststellbaren Gradbogen G kann die Neigung beliebig fixiert werden.

Ist derart der Rahmen um einen Winkel φ gegen die Vertikale geneigt, so ist von dem Gewichte des Pendels natürlich nur eine Komponente $Q \cdot \cos \varphi$ wirksam, die dem Pendel die Beschleunigung $g \cdot \cos \varphi$ erteilt. Es müßte daher die Schwingung im Verhältnis $1 : \cos \varphi$ verlangsamt sein, und in der Tat zeigen dies die messenden Beobachtungen*). Die Schwingungsdauer wird um so größer, je mehr der Apparat geneigt wird. Wird der Neigungswinkel 90°, so geht das Pendel mit unendlich großer Schwingungsdauer in das Horizontalpendel über, das in der Mechanik starrer Körper eingehender besprochen werden soll.

§ 61. Das Zykloidenpendel.

Bei dem bisher betrachteten Pendel hängt die Schwingungsdauer im allgemeinen von der Amplitude ab, und nur für kleine Amplituden wird diese Abhängigkeit praktisch bedeutungslos, wie in einem früheren Abschnitt gezeigt wurde. Hingegen ist auch für beliebige Amplituden der Isochronismus der Pendelschwingungen erfüllt, wenn man das Pendel zwingt, statt einer kreisförmigen eine zykloidische Bahn zu beschreiben; dies folgt aus der schon erwähnten Eigentümlichkeit der Zykloide, eine „Tautochrone" darzustellen.

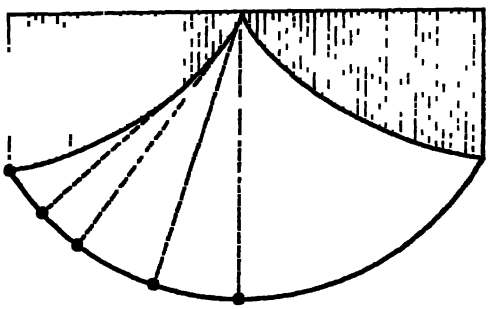


Fig. 64. Das Zykloidenpendel.

Eine zykloidische Pendelbewegung kann in der Tat herbeigeführt werden, wenn man das Pendel (Fig. 64) in einem Punkte aufhängt, in dem zwei feste Leisten von zykloidischer Gestalt zusammenstoßen. Die Kurve, die das Pendel beschreibt, ist dann die sogenannte Evolute der von den Leisten gebildeten Kurve; die Evolute einer Zykloide ist aber, wie in der Geometrie gezeigt wird, stets wieder eine Zykloide. Das Zykloidenpendel ist von Huygens ersonnen worden; doch kommt ihm keine praktische Bedeutung zu, da die Forderung des Isochronismus der Schwingungen

*) In derselben Weise erscheinen die Pendelschwingungen eines Metronoms verlangsamt, wenn man es auf eine schiefe Unterlage stellt.

in praktisch vollkommen genügendem Maß bei gewöhnlichen Pendelschwingungen von genügend kleiner Amplitude (nur wenige Grade) erfüllt ist.

§ 62. Das konische Pendel.

Alle bisher betrachteten Pendelschwingungen stellen insofern einen Spezialfall dar, als hierbei der schwingende Massenpunkt eine Bahn beschreibt, die mit dem Aufhängepunkt in derselben Ebene liegt. Dieser Spezialfall tritt, wie schon erwähnt, dann ein, wenn das Pendel aus seiner Ruhelage entfernt und ohne jeden seitlichen Impuls losgelassen wird. Sonst verläuft die Bahnkurve, in einer Kugelfläche, die um den Aufhängepunkt mit der Fadenlänge als Radius zu beschreiben ist. Einen besonderen Fall einer derartigen Bewegung (die in ihrer Allgemeinheit erst in dem nächsten Abschnitt zu besprechen sein wird) stellt eine Bewegung in einer horizontalen Kreisbahn dar; der Faden legt hierbei den Mantel eines Kreiskegels zurück, weshalb ein derart bewegtes Pendel als Kegelpendel oder als konisches Pendel bezeichnet wird.

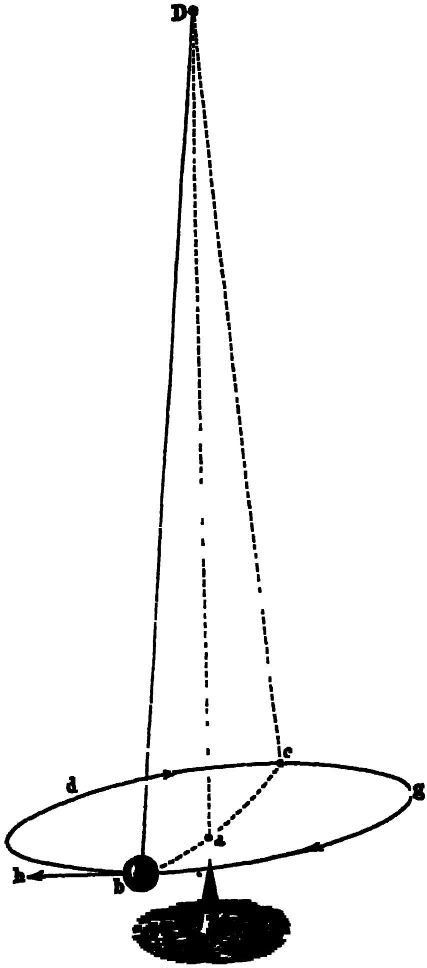


Fig. 65. Das Kegelpendel.

Eine solche Bewegung ist in Fig. 65 dargestellt. Das Pendel beschreibt die horizontale Kreisbahn bdcg, deren Mittelpunkt auf der Vertikalen liegt, die durch den Aufhängepunkt D hindurchgeht. Würde das Pendel an seinem augenblicklichen Aufenthaltsort b festgehalten und dann ohne seitlichen Impuls losgelassen, so würde es in einer vertikalen Ebene längs des Kreisbogens bc durch die Ruhelage a schwingen.

Die Gesetzmäßigkeiten einer konischen Pendelbewegung ergeben sich aus den Beziehungen, daß sowohl von dem vertikalen Gewicht des Pendelkörpers als auch von der horizontalen **Zentrifugalkraft** je eine Komponente durch die Spannung des Fadens aufgehoben wird, daß aber die übrigbleibenden Komponenten, die zu der Fadenrichtung senkrecht sind, einander wechselseitig aufheben müssen.

Ist nun α der konstante Winkel, den die Fadenrichtung mit der Vertikalen einschließt, und nennen wir das Gewicht P und die Zentrifugalkraft K, so werden durch die Fadenspannung (Fig. 66) die Komponenten $P \cdot \cos\alpha$ und $K \cdot \sin\alpha$ aufgehoben. Die übrigbleibenden Komponenten müssen einander das Gleichgewicht halten; es muß also die Beziehung erfüllt sein

$$P \sin\alpha = K \cos\alpha. \tag{73}$$

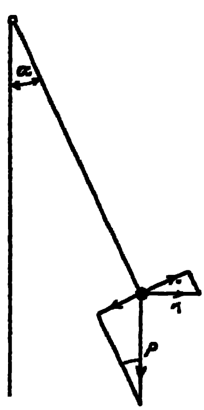


Fig. 66.

Nun ist aber, wenn wir die Masse des Pendelkörpers mit m bezeichnen, P gleich mg, und andererseits ist (nach Gl. 29) K gleich $4\pi^2 mr/\tau^2$, wenn wir mit r den Radius der horizontalen Kreisbahn bezeichnen und mit τ die Schwingungsdauer des Kegelpendels, die sich mit seiner Umlaufszeit deckt. Es ist also $\tau^2 g \sin\alpha = 4\pi^2 r \cos\alpha$. Andererseits ist, wenn wir mit h die **Höhe** des Pendelkegels bezeichnen, also den Abstand zwischen der horizontalen Kreisebene und dem Aufhängepunkt, $h = r \operatorname{ctg}\alpha$. Es ist demnach

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos\alpha}{g}}. \tag{74}$$

Das Kegelpendel schwingt also um so schneller, je größer der von ihm beschriebene Kreis ist.

§ 63. Das sphärische Pendel.

Die allgemeinste Bewegung des Fadenpendels, die in einer Kugelfläche verläuft und deshalb als **sphärische Pendelbewegung** bezeichnet wird, ist sehr kompliziert. Theoretische Betrachtungen zeigen, daß im allgemeinen der Winkel, den die Fadenrichtung mit der Vertikalen einschließt, periodisch zwischen zwei Grenzwerten schwankt. Fassen wir die Ruhelage als Pol der Kugel auf, so bleibt der pendelnde Punkt stets **innerhalb zweier Breitenkreise** eingeschlossen und kann daher (solange keine Bewegungshindernisse die Bewegung beeinflussen) den durch die beiden Breitenkreise

begrenzten Bereich nicht verlassen. Dasselbe gilt natürlich auch für einen schweren Massenpunkt, den wir, statt ihn aufzuhängen, in das Innere einer Hohlkugel mit seitlichem Impuls bringen.

Ist im besonderen die durch den seitlichen Impuls hervorgebrachte Anfangsgeschwindigkeit horizontal, so ist der eine Grenzwert des Winkels, und zwar der obere, gleich der anfänglichen Elongation, während für den anderen Grenzwert die Beziehung gilt

$$\sin \vartheta' = \frac{v_0}{\sqrt{Rg}}; \tag{75}$$

dabei bedeutet v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und R den Kugelradius.

Wenn die ursprüngliche Elongation genügend klein ist, so ist die Bahn ungefähr von der Art, wie sie in Fig. 67 dargestellt ist. Sie besteht aus einer Folge ungeschlossener, Ellipsen ähnlicher Kurven. Dabei dreht sich die große Achse der Kurve im Sinn der Bewegung, und zwar mit einer Winkelgeschwindigkeit, die näherungsweise durch die Formel bestimmt ist

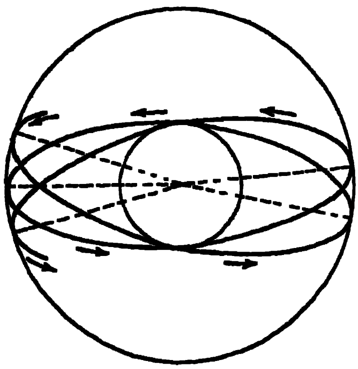


Fig. 67. Bahn des sphärischen Pendels.

$$\omega = \frac{3\pi}{4} \frac{\vartheta \vartheta'}{\tau_0}. \tag{76}$$

Hierin bedeuten ϑ und ϑ' die beiden vorhin erwähnten Grenzamplituden und τ_0 die Schwingungsdauer, reduziert auf unendlich kleine lineare Schwingungen.

§ 64. Die gedämpfte Pendelschwingung.

Die Erfahrung zeigt, daß alle Pendelschwingungen in ihrem Verlaufe infolge der vorhandenen Bewegungshindernisse allmählich „abklingen", indem ihre Amplitude immer kleiner und kleiner und schließlich unmerklich klein wird. Eine derartige Schwingung wird als gedämpft bezeichnet. Die Erfahrung zeigt weiterhin, daß sich die beobachtete Dämpfung recht gut durch die Annahme erklären läßt, daß die der Schwingung entgegenwirkende Reibungskraft der jeweiligen Bewegungsrichtung entgegengesetzt und der Geschwindigkeit proportional ist. Die durch die Masse des Pendelkörpers dividierte Reibungskraft kann gleich gesetzt werden dem Produkt aus dem Geschwindigkeitsbetrag und einer Konstanten, die als die Dämpfungskonstante bezeichnet wird.

Auf Grund dieser Annahmen ergeben theoretische Überlegungen für die gedämpfte Pendelschwingung die folgenden Gesetzmäßigkeiten. Für nicht zu große Amplituden ist ebenso wie die ungedämpfte auch die gedämpfte Pendelschwingung isochron, also die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude. Für die Schwingungsdauer ergibt sich die Formel

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - \frac{k^2}{4}}}, \tag{77}$$

wenn k die Dämpfungskonstante bedeutet und a^2 der Proportionalitätsfaktor zwischen der Beschleunigung und der Entfernung aus der Ruhelage ist (vgl. Gl. 25). Durch die Dämpfung werden also die Schwingungen verlangsamt.

Die Amplitude vermindert sich von Schwingung zu Schwingung derart, daß der Logarithmus der Amplitude bei jeder Schwingung um eine konstante Differenz kleiner wird als bei der vorhergehenden; diese als logarithmisches Dekrement bezeichnete Differenz ist bei Verwendung natürlicher Logarithmen gleich dem halben Produkt aus Dämpfungskonstante und Schwingungsdauer.

Schließlich zeigt es sich, daß der Augenblick des größten Schwingungsausschlags die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch die Ruhelage nicht so wie bei der ungedämpften Schwingung genau halbiert. Die Zeit von einem Durchgang bis zum Maximum der Elongation ist stets kürzer, die Zeit von da ab bis zum nächsten Durchgang länger als eine Viertelperiode. Die erste Zeit ist $\tau/4 - \beta$, die zweite $\tau/4 + \beta$, wobei β (mittels einer hier nicht zu erörternden Beziehung) vom Pendelgewicht, der Dämpfungskonstante und der Pendellänge abhängt.

Der Verlauf einer gedämpften Schwingung ist graphisch in Fig. 68 dargestellt*). Als Abszisse ist die Zeit aufgetragen; als Ordinate die Entfernung des Massenpunktes von seiner Ruhelage. Die eine der Kurven gibt eine reine Sinusschwingung von derselben Amplitude wie die gedämpfte Schwingung wieder. Diese Kurve beginnt, dem willkürlichen Anfangszustand entsprechend, im Punkte X_0; die Maxima und Minima der Kurve sind mit dem Buchstaben H bezeichnet, die Fußpunkte der von den Scheitelpunkten auf die Abszissenachse gefällten Lote mit A und die Schnittpunkte mit der Abszissenachse, die den Durchgängen durch die Ruhelage

*) Nach Helmholtz, Vorles. über theor. Physik, Bd. I, Abt. 2.

entsprechen, mit Ω. Die Distanzen zweier benachbarter A-Punkte oder zweier benachbarter Ω-Punkte entsprechen also einer halben Periode, eine Strecke zwischen einem A-Punkt und einem benachbarten Ω-Punkt einer Viertelperiode.

In Fig. 68 ist ferner eine bei E beginnende gestrichelte **Exponentialkurve** gezeichnet, die für eine Abszisse t das Produkt aus der Strecke OE und dem Exponentialausdruck $e^{-\frac{k}{2}t}$ darstellt, wenn k die Dämpfungskonstante ist. Wenn nun die Ordinaten der Sinuskurve nach dem Maßstab der Exponentialkurve verkleinert werden, so entsteht die dritte Kurve, die den Verlauf der gedämpften Schwingung wiedergibt. Die Strecken AH werden hierbei auf die von Schwingung zu Schwingung kleiner werdenden Strecken AJ

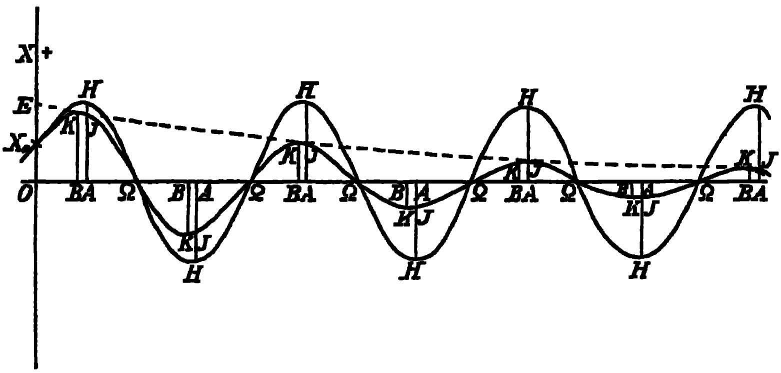


Fig. 68. Die gedämpfte Schwingung.

verkürzt. Ebenso wie in den Punkten H eine horizontale Linie die Tangente an die Sinuskurve darstellt, so berührt in den Punkten J die Exponentialkurve die Kurve der gedämpften Schwingung. In den Punkten J verläuft also die Kurve der gedämpften Schwingung bereits schräg, und zwar nach abwärts bei positiver, nach aufwärts bei negativer Ordinate. Bezeichnen wir mit K die Scheitel der Kurve und mit B deren Fußpunkte auf die Abszissenachse, so liegen die Punkte B links von den Punkten A, wobei die Abstände BA überall denselben Wert haben.

Für das logarithmische **Dekrement**, das dem Produkt aus der Dämpfungskonstante und der halben Schwingungsdauer gleich ist, folgt aus Gl. 77

$$\sigma = \frac{k\pi}{\sqrt{a^2 - \frac{k^2}{4}}}, \qquad (78)$$

entsprechen, mit Ω. Die Distanzen zweier benachbarter A-Punkte oder zweier benachbarter Ω-Punkte entsprechen also einer halben Periode, eine Strecke zwischen einem A-Punkt und einem benachbarten Ω-Punkt einer Viertelperiode.

In Fig. 68 ist ferner eine bei E beginnende gestrichelte **Exponentialkurve** gezeichnet, die für eine Abszisse t das Produkt aus der Strecke OE und dem Exponentialausdruck $e^{-\frac{k}{2}t}$ darstellt, wenn k die Dämpfungskonstante ist. Wenn nun die Ordinaten der Sinuskurve nach dem Maßstab der Exponentialkurve verkleinert werden, so entsteht die dritte Kurve, die den Verlauf der gedämpften Schwingung wiedergibt. Die Strecken AH werden hierbei auf die von Schwingung zu Schwingung kleiner werdenden Strecken AJ

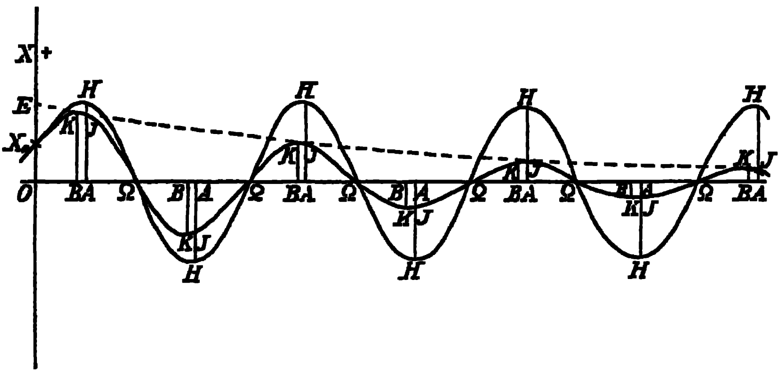


Fig. 68. Die gedämpfte Schwingung.

verkürzt. Ebenso wie in den Punkten H eine horizontale Linie die Tangente an die Sinuskurve darstellt, so berührt in den Punkten J die Exponentialkurve die Kurve der gedämpften Schwingung. In den Punkten J verläuft also die Kurve der gedämpften Schwingung bereits schräg, und zwar nach abwärts bei positiver, nach aufwärts bei negativer Ordinate. Bezeichnen wir mit K die Scheitel der Kurve und mit B deren Fußpunkte auf die Abszissenachse, so liegen die Punkte B links von den Punkten A, wobei die Abstände BA überall denselben Wert haben.

Für das **logarithmische Dekrement**, das dem Produkt aus der Dämpfungskonstante und der halben Schwingungsdauer gleich ist, folgt aus Gl. 77

$$\sigma = \frac{k\pi}{\sqrt{a^2 - \frac{k^2}{4}}}, \tag{78}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{-2} &= \xi + \gamma^2 X\\ \lambda_{-1} &= \xi - \gamma X\\ \lambda_0 &= \xi + X\\ \lambda_{+1} &= \xi - \frac{X}{\gamma}\\ \lambda_{+2} &= \xi + \frac{X}{\gamma^2}.\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Die Zahl dieser Gleichungen kann natürlich noch nach Belieben vermehrt werden, wenn noch frühere oder spätere Umkehrbeobachtungen hinzugefügt werden. In diesen Gleichungen treten drei Unbekannte auf, nämlich ξ, X und γ. Sie können aus den Gleichungen berechnet werden, und zwar, wofern man mehr als drei Gleichungen benutzt, zweckmäßig und am genauesten mittels der bekannten Methode der kleinsten Quadrate.

Für minder genaue Messungen genügt es, etwa durch Subtraktion der zweiten von der dritten der Gl. 79 die Beziehung abzuleiten

$$\lambda_0 - \lambda_{-1} = X(1 + \gamma)$$

und daher nach der dritten der Gleichungen (79)

$$\xi = \lambda_0 - \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{1 + \gamma}. \tag{80}$$

Andererseits folgt aus den Gleichungen (79)

$$\gamma = \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{\lambda_0 - \lambda_{+1}}. \tag{81}$$

Wie mittels der Gl. 80 und 81 aus den Skalenwerten der beobachteten Umkehrungen das Dämpfungsverhältnis und der Skalenwert der Ruhelage ermittelt werden können, möge das (dem „Physikalischen Praktikum" von Wiedemann-Ebert entnommene) Beispiel einer stark gedämpften Schwingung in Tabelle V zeigen*).

Aus dem Mittelwert finden wir für den Briggsschen Logarithmus von γ die Zahl 0,1562, daher für den natürlichen**) 0,3597 und somit für das doppelt so große Dekrement in dem betrachteten Beispiel 0,7194.

---

*) Die Zahlen der letzten Vertikalkolumne ergeben sich folgendermaßen: 328 — 28,4; 280 + 19,7 usw.

**) Den natürlichen Logarithmus einer Zahl erhält man, indem man den auf die Basis 10 bezogenen mit 2,302585 multipliziert. Selbstverständlich kann man aber das Dekrement nach Belieben ebensowohl auf die Basis 10 als auch auf die Basis e beziehen.

Tabelle V.
Beispiel einer gedämpften Schwingung

Skalenwerte der beobachteten Umkehrpunkte	Abstand der Umkehrpunkte	Dämpfungsverhältnis γ	$\frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{1+\gamma}$	Skalenwert der Ruhelage nach Gl. 80
259				
	69		28,4	
328		1,44		299,6
	48		19,7	
280		1,43		299,7
	33,5		13,8	
313,5		1,43		299,7
	23,5		9,7	
290		1,43		299,7
	16,5		6,8	
306,5		1,43		299,7
	11,5		4,7	
295		1,44		299,7
	8		3,3	
303		Mittel. 1,433		299,7

§ 66. Die aperiodische Pendelbewegung.

Bei dem Vorhandensein einer Dämpfung kann, wie die Theorie zeigt, ein schwingender Vorgang nur dann eintreten, wenn die Dämpfungskonstante k kleiner ist als 2a, wobei, wie stets, mit a^2 der Proportionalitätsfaktor zwischen der Beschleunigung und dem Abstand von der Ruhelage bezeichnet wird. Ist hingegen die **Dämpfung so stark**, daß

$$k \geqq 2a \tag{82}$$

ist, dann kehrt der aus der Ruhelage entfernte Massenpunkt in diese **aperiodisch** zurück, ohne daß es zu einer Schwingung kommen würde. Am **raschesten** erfolgt die Rückkehr, wenn die Dämpfungskonstante gerade gleich 2a ist.

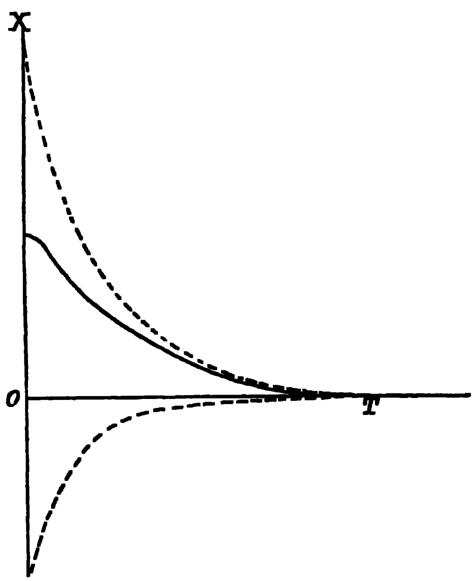


Fig. 70.

Eine derartige aperiodische Bewegung erscheint hinsichtlich der Abhängigkeit des Ausschlages von der Zeit durch eine Kurve dargestellt, deren Ordinaten überall gleich sind der Summe der Ordinaten zweier Exponentialkurven, von denen die eine positive und

die andere negative Ordinaten hat. Hieraus folgt, daß entweder der Massenpunkt ohne Überschreitung der Ruhelage in diese asymptotisch zurückkehrt (Fig. 70) oder aber nach bloß einmaliger Durchsetzung der Ruhelage, wobei er sich ihr dann asymptotisch von der anderen Seite nähert (Fig. 71).

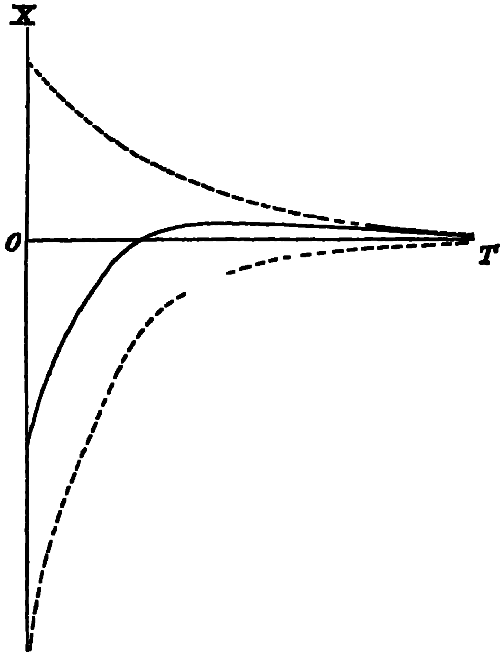


Fig. 71.

§ 67. Die erzwungene Schwingung.

Zu merkwürdigen Erscheinungen kommt es, wie die Theorie zeigt und die Erfahrung bestätigt, wenn ein schwingender Vorgang durch eine äußere Kraft, die selbst eine periodische Funktion der Zeit ist, beeinflußt wird, oder auch durch eine andere Schwingung, die man in diesem Falle als anregende Schwingung bezeichnet. Die beeinflußte Schwingung setzt sich dann aus zwei Schwingungen zusammen. Die eine geht so vor sich, als ob der andere periodische Vorgang gar nicht vorhanden wäre; diese Schwingung wird als die Eigenschwingung bezeichnet. Bei dem Vorhandensein einer Dämpfung klingt die Eigenschwingung allmählich ab. Die zweite Schwingung, die sich über die Eigenschwingung lagert, erfolgt mit der Periode der anregenden Schwingung; sie wird als erzwungene Schwingung bezeichnet. Sie ist auch bei dem Vorhandensein einer Dämpfung ungedämpft, wofern die an-

regende Schwingung oder wirksame Kraft ungedämpft ist. Ist dies der Fall, so wird also stets nach einer hinreichend großen Zeit die anfänglich vorhandene Eigenschwingung völlig unmerklich, so daß nur die erzwungene Schwingung beobachtbar bleibt.

Ist die Frequenz der Eigenschwingung ν_0 und die Frequenz der anregenden Schwingung oder periodisch veränderlichen Kraft ν und P deren Amplitude, so ergibt die Theorie für die Amplitude der erzwungenen Schwingung die Formel

$$\mathrm{R} = -\frac{\mathrm{P}}{2\pi\sqrt{4\pi^2(\nu^2-\nu_0^2)^2+\mathrm{k}^2\nu^2}}. \tag{83}$$

Die Amplitude der erzwungenen Schwingung ist also direkt proportional der Amplitude der anregenden Schwingung.

Ferner zeigt es sich, daß die erzwungene Schwingung gegenüber der anregenden im allgemeinen einen Phasenunterschied zeigt; die erzwungene Schwingung bleibt in der Phase um einen Betrag δ zurück, der durch die Gleichung bestimmt ist

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{\mathrm{k}\nu}{2\pi(\nu^2-\nu_0^2)}. \tag{84}$$

Die Phasenverschiebung ist also um so größer, je stärker die Dämpfung ist.

§ 68. Die Resonanz.

Nach der Formel für die Amplitude der erzwungenen Schwingung

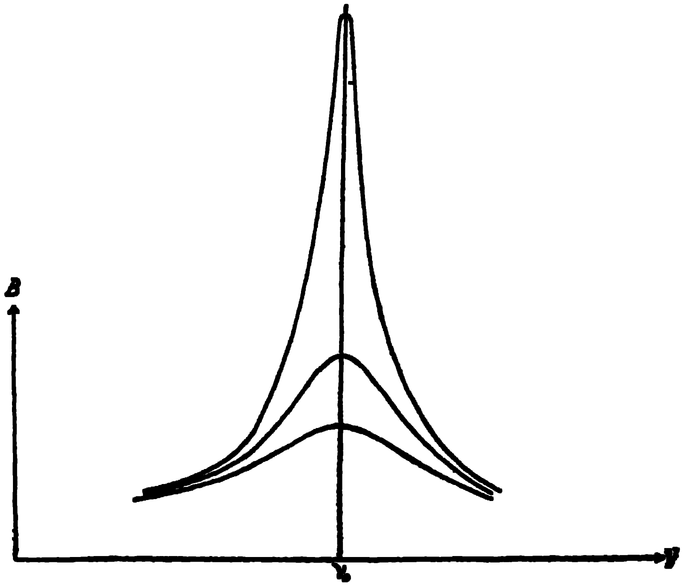


Fig. 72. Resonanz.

muß diese außerordentlich zunehmen, wenn die Dämpfung gering ist und sich die Frequenz der anregenden Schwingung nahezu der Eigenfrequenz nähert. Für verschwindende Dämpfung und völlige Übereinstimmung der beiden Frequenzen müßte sogar die Amplitude der erzwungenen Schwingung unendlich groß werden. Das rasche Anwachsen in solchen Fällen wird als Resonanz bezeichnet. Fig. 72 stellt für verschiedene Werte der Dämpfungskonstante den Verlauf der Kurven dar, die die Amplitude der erzwungenen Schwingung in ihrer Abhängigkeit von der anregenden Frequenz zeigen. Für $\nu = \nu_0$ weisen die Kurven ein Maximum auf, und zwar ein um so steileres, je kleiner die Dämpfung ist. Für den Fall vollkommener Resonanz wird nach Gl. 84 die Phasenverschiebung gleich einer Viertelperiode.

§ 69. Die Schwebungen.

Wenn die Dämpfung gering ist, so klingt die Eigenschwingung nur langsam ab. Die Superposition der Eigenschwingung und der erzwungenen Schwingung führt zu besonders bemerkenswerten Erscheinungen, wenn die anregende Frequenz nur wenig von der Eigenfrequenz verschieden ist, und die Anregung derart erfolgt,

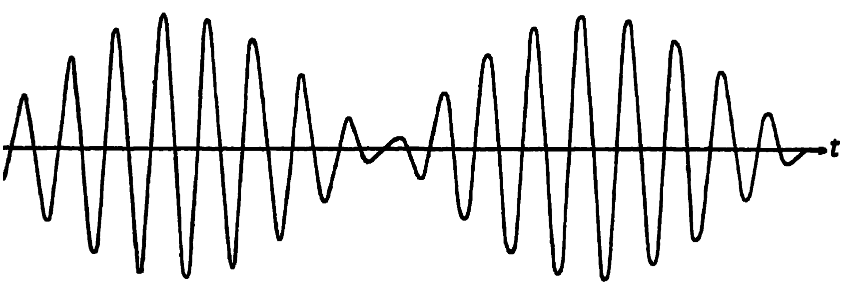


Fig. 73. Schwebung.

daß beide Schwingungen die gleiche Amplitude haben; dies ist dann der Fall, wenn in dem Augenblick, in dem die Anregung beginnt, der Massenpunkt sich in Ruhe in der Ruhelage befindet. In einem solchen Falle ist die resultierende Schwingung etwa in der Form darstellbar

$$x = A[\cos(\nu t) - \cos(\nu_0 t)]. \qquad (85)$$

Wir wollen die Differenz $\nu - \nu_0$, die nach der getroffenen Voraussetzung klein gegenüber ν und ν_0 sein soll, mit 2ω bezeichnen. Dann

können wir unter Benutzung einer bekannten goniometrischen Formel die Gl. 85 auch in der Gestalt schreiben

$$x = 2A \sin(\omega t) \sin\left(\frac{\nu + \nu_0}{2} t\right). \tag{86}$$

Einen durch eine solche Formel dargestellten Vorgang können wir, weil ω klein gegen ν und ν_0 ist, als eine **Schwingung mit periodisch veränderlicher Amplitude** auffassen. Ein derartiger Vorgang wird als **Schwebung** bezeichnet; ω wird die **Schwebungszahl** genannt. Für eine Schwebung ist die Abhängigkeit des Ausschlages von der Zeit graphisch durch Fig. 73 dargestellt. Die Amplitude ist für $t = 0$ selbst Null, sie nimmt zu, bis $\sin(\omega t)$ gleich Eins geworden ist, dann nimmt sie wieder bis Null ab, wächst wieder, wird wieder Null, und so fort.

§ 70. Die gekoppelten Pendelschwingungen.

An Pendelschwingungen lassen sich die Erscheinungen der Resonanz und der Schwebung leicht demonstrieren, indem man zwei Pendel von gleicher Schwingungsdauer miteinander **koppelt**, d. h. zwischen ihnen eine Verbindung anbringt. Ein besonders einfaches Beispiel eines derartigen Systems gekoppelter Pendel können wir herstellen, indem wir in einem Abstand von 50 cm an zwei, etwa 2 m langen Fäden zwei [illegible] aufhängen. In ungefähr halber Höhe verbinden wir die beiden Fäden durch einen Querfaden von etwa 70 cm Länge und hängen in der Mitte des Querfadens ein Gewicht von 50 g auf*). Wir versetzen sodann das erste Pendel in Schwingungen senkrecht zu derjenigen Ebene, die in der Ruhelage von den beiden vertikalen Fäden gebildet wird.

Während seiner Schwingungen **überträgt** nun das erste Pendel **Schwingungsenergie** auf das zweite. Es hebt während des Schwingens den Querfaden; dieser übt dadurch in bestimmten Intervallen einen Zug auf das zweite Pendel aus und setzt es derart ebenfalls in Schwingung, da es infolge der Gleichheit der Schwingungsdauer zu einer **Resonanz** kommt.

Nach einer bestimmten Zahl von Schwingungen hat, wie der Versuch zeigt, das erste Pendel seine ganze Energie an das zweite abgegeben; es ist dies eine Folge der fortwährenden Beschleunigungen, die das zweite Pendel seitens des ersten erfahren hat, wodurch umgekehrt wiederum ständige Verzögerungen der ersten Pendelbewegung verursacht wurden. Bei den angegebenen Fadenlängen und Belastungen ist diese Energieübertragung nach zehn Schwingungen

*) Die angegebenen Zahlen nach **Grimsehls** Lehrbuch der Physik.

eingetreten; sie erfolgt aber bereits nach fünf Schwingungen, wenn das die Kopplung bewirkende Gewicht (von 50 g) verdoppelt wird.

Wenn nach vollkommener Energieübertragung das erste Pendel zur Ruhe gekommen ist und das zweite am stärksten schwingt,

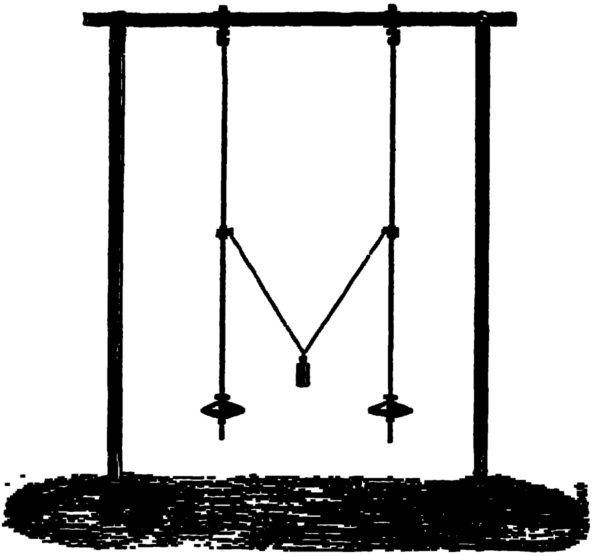


Fig. 74.

wiederholt sich der frühere Vorgang in umgekehrtem Sinne. Das zweite Pendel überträgt nun seine Schwingungsenergie an das erste, und so wandert diese Energie zwischen den beiden Pendeln hin und her. Ein Apparat, bei dem die Koppelung durch ein angehängtes Gewicht bewirkt wird, ist in Fig. 74 dargestellt.

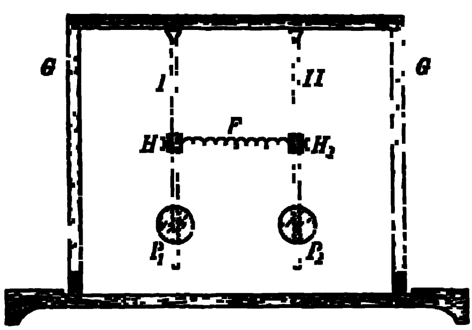


Fig. 75. Gekoppelte Pendelschwingungen.

Vollkommenere Versuche über Resonanz und Schwebung bei Pendelschwingungen lassen sich mittels des in Fig. 75 schematisch abgebildeten Apparates anstellen*). An dem Gestell G

*) Vgl. hierzu und zu dem Folgenden den Aufsatz von Max Wien, „Schwingungen gekoppelter Systeme“ im Band „Physik“ der „Kultur der Gegenwart“, Leipzig (Teubner), 2. Aufl., 1925. Der in Fig. 75 dargestellte Apparat stammt von der Firma B. Schilling in Dresden.

schwingen zwei Pendel I und II in der Figurenebene, wobei ihre Schwingungsdauer durch die verstellbaren Laufgewichte P_1 und P_2 beliebig reguliert werden kann. Die Koppelung wird durch eine Spiralfeder F bewirkt, die mittels zweier Hülsen H_1 und H_2 auf den Pendelstangen hinauf- und hinuntergeschoben werden kann. Dadurch kann wiederum die Intensität der Koppelung beliebig reguliert werden. Schließlich läßt sich auch die Dämpfung beliebig variieren, indem an den Enden der Pendelstangen kleine Blechscheiben angebracht sind, die man in eine mit Wasser oder Öl gefüllte Wanne tauchen lassen kann.

Mittels dieses Apparates kann man zunächst genauer die abwechselnde Energieübertragung zwischen den beiden Pendeln bei bloßer Luftdämpfung studieren. Man kann dann feststellen, daß

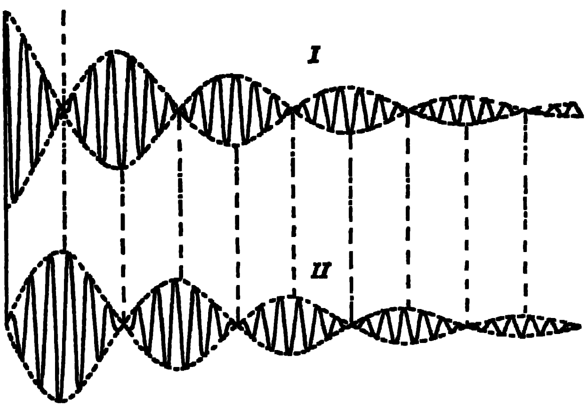


Fig. 76.

jedes der beiden Pendel Schwebungen ausführt, wie sie in Fig. 76 wiedergegeben sind; dabei bezieht sich die obere der Kurven, die die Elongation in der Abhängigkeit von der Zeit darstellen, auf das erste Pendel (das also zuerst schwingt), die untere auf das zweite Pendel (das durch das erste angeregt wird).

Wird die Spiralfeder hinuntergeschoben, so wird dadurch die Koppelung „enger", und als eine Folge davon nimmt man ein Schnellerwerden der Schwebungen wahr.

Werden beide Pendel gleichzeitig in Schwingungen versetzt, so werden die Schwebungen unvollkommen; sie bleiben ganz aus, wenn beide Pendel mit gleicher Amplitude und gleicher oder entgegengesetzter Phase in Schwingungen versetzt werden. Ebenso werden die Schwebungen unvollkommen, wenn die beiden Pendel durch eine Verschiebung eines Laufgewichtes verstimmt werden,

so daß sie nicht mehr die gleiche Schwingungsdauer haben. Die Unvollkommenheit der Schwebungen äußert sich darin, daß das erste Pendel dann nicht völlig zur Ruhe kommt, sondern daß nur seine Amplitude zwischen einem Minimal- und einem Maximalwert hin- und herschwankt.

Wird bei dem ursprünglich beschriebenen Versuch das zweite Pendel durch ein leichtes Holzpendel ersetzt, so ist der Verlauf so, wie er durch Fig. 76 dargestellt wurde; doch ist dann die Amplitude des zweiten Pendels wesentlich größer.

Wird die Dämpfung des zweiten Pendels dadurch vermehrt, daß man eine am Ende der Pendelstange befestigte Blechscheibe in Wasser oder Öl schwingen läßt, so bleiben die Schwebungen aus, wofern die Koppelung nur lose ist; es klingen dann beide Pendelschwingungen ab, nachdem die des zweiten Pendels ein Maximum erreicht hat. Hierbei erweist sich für beide Pendel die Dämpfungskonstante gleich groß, und zwar ist sie gleich dem Mittelwerte der Dämpfungskonstanten, die den beiden Pendeln zukämen, wenn sie nicht gekoppelt wären.

§ 71. Das Doppelpendel.

Als **Doppelpendel** bezeichnen wir ein Pendel, dessen Aufhängepunkt selbst Pendelschwingungen ausführt. Zur Demonstration derartiger **zusammengesetzter Pendelschwingungen** bedient man sich zweckmäßig eines Apparates von der Art, wie er durch Fig. 77 dargestellt ist. Eine über E, F und G gehende Schnur, die in ihrem mittleren Teil doppelt geführt ist und durch zwei Ringe (r und s) zusammengehalten wird, trägt ein schweres, mit einer kleinen Öffnung versehenes, trichterförmiges Gefäß. Für Schwingungen, die der Trichter in der Figurenebene ausführt, kann das Dreieck EGr als ruhend angesehen werden, so daß für solche Schwingungen die Pendellänge durch den Abstand gegeben ist, den der Schwerpunkt des Trichters von dem Ring r hat. Hingegen kommt für Schwin-

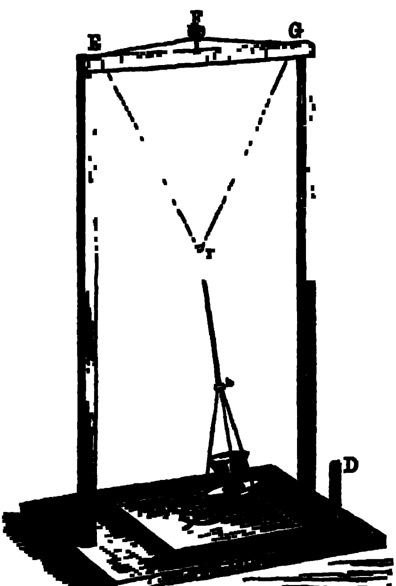


Fig. 77. Doppelpendel.

gungen, die senkrecht zu der Figurenebene erfolgen, die ganze Pendellänge in Betracht.

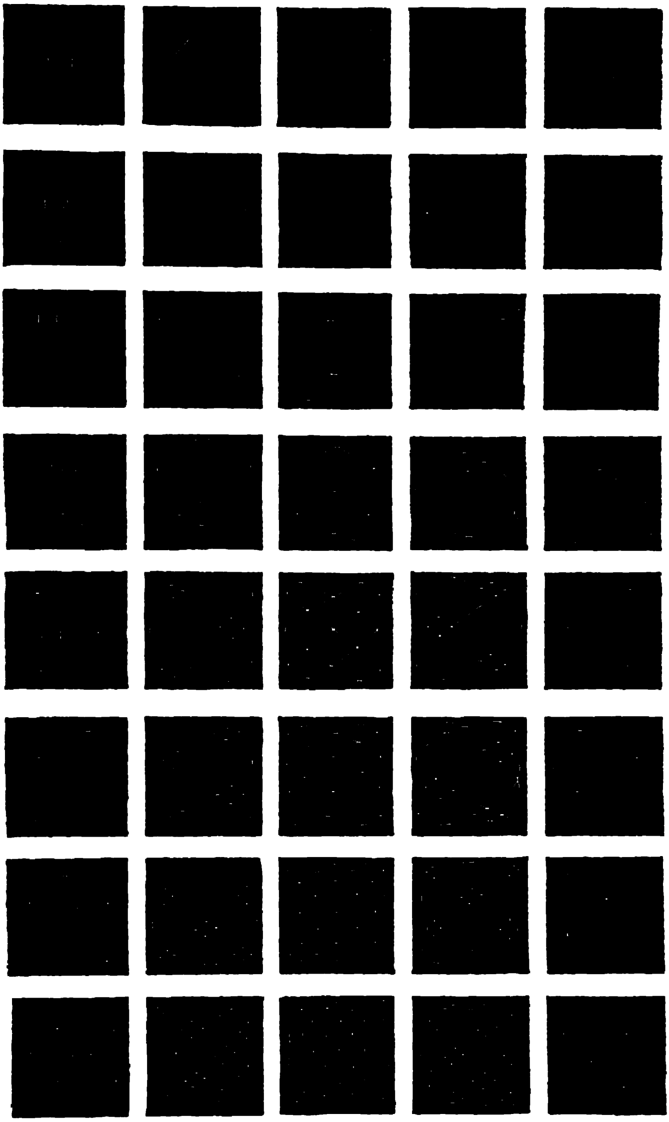


Fig. 78. Lissajoussche Figuren.

Bringt man also den Trichter in einer Richtung aus der Gleichgewichtslage, die mit der Figurenebene einen anderen Winkel als einen von 0° oder von 90° einschließt, so entsteht eine Schwingung,

die sich nach dem Satz vom Bewegungsparallelogramm aus zwei zueinander senkrechten Schwingungen von im allgemeinen verschiedener Periode zusammensetzt.

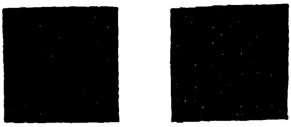


Fig. 79.

Schüttet man nun in den Trichter Sand und stellt unter ihn ein wagrechtes Brett, so zeichnet der ausfließende Sand die bei der Schwingung beschriebene Bahn, die sogenannte Schwingungskurve, auf. Indem man die Ringe nach

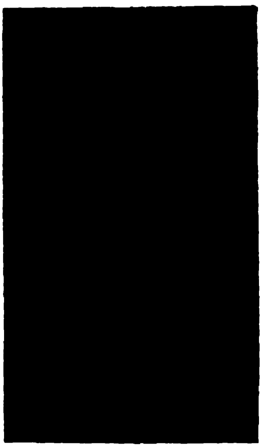


Fig. 80.

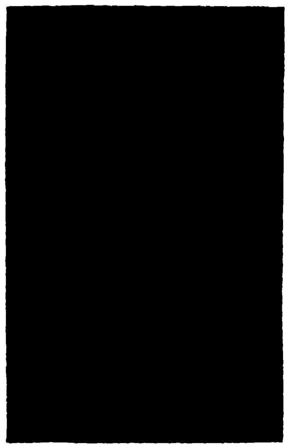


Fig. 81.

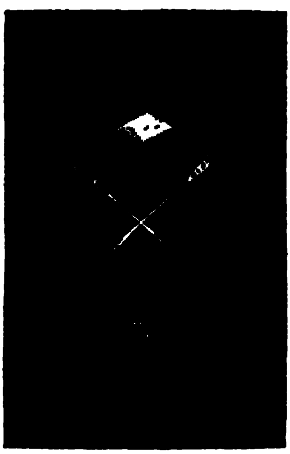


Fig. 82.



Fig. 83.

oben oder unten verschiebt, kann man das Verhältnis der beiden Schwingungszeiten beliebig variieren. Statt des mit Sand gefüllten Trichters kann auch bei geeigneter Versuchsanordnung ein Stift benutzt werden, der die Schwingungskurve entweder mit Tinte auf Papier oder mit einer scharfen Spitze auf einer berußten Glasfläche aufzeichnet.

Besonders regelmäßige Figuren entstehen durch Zusammensetzung zweier zueinander senkrechter Schwingungen dann, wenn die beiden Frequenzen in einfachen ganzzahligen Verhältnissen zueinander stehen. Derartige Figuren werden nach ihrem Erforscher und erstem Beobachter*) als Lissajoussche Figuren bezeichnet.

In Fig. 78 sind derartige (geometrisch konstruierte) Kurven zusammengestellt. Die acht Horizontalreihen entsprechen einem Verhältnis der Schwingungszahlen von 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 2 : 3, 3 : 4, 3 : 5, 4 : 5 und 5 : 6. Die fünf Vertikalreihen wiederum entsprechen einem Phasenunterschied Null, einem solchen von einer Achtelperiode, einer Viertelperiode, drei Achtelperioden und einer halben Periode. Überdies ist in Fig. 79 noch die Schwingungskurve für ein Frequenzverhältnis 8 : 9 und zwar links ohne Phasenunterschied, rechts für einen solchen von einer Viertelperiode gezeichnet.

Bei den tatsächlich von Pendelapparaten aufgezeichneten Kurven äußert sich in sehr schöner Weise auch das Abklingen der Schwingungen; dadurch entsteht eine Folge von feinen, immer engere Räume umschreibenden Linien, wie sie für das Beispiel eines Frequenzenverhältnisses von 1 : 2 in Fig. 80, fur das Beispiel eines Frequenzenverhältnisses von 1 : 3 in Fig. 81 nach Versuchsergebnissen von Airy**) wiedergegeben sind. Die Figg. 82 und 83 sind Nachbildungen von Figuren, die Tisley mittels eines von ihm ersonnenen Doppelpendelapparates***) erhalten hat und denen die Verhältnisse 2 : 3 und 3 : 4 entsprachen.

Sechstes Kapitel.

Die Wurfbewegung.

§ 72. Der vertikale Wurf.

Eine Wurfbewegung ergibt nur in dem speziellen Falle einer vertikalen Anfangsgeschwindigkeit eine geradlinige Bahn.

---

*) Den Anlaß zu den Untersuchungen von Lissajous (1847) boten allerdings akustische Probleme; seine Methode war eine optische.

**) „Nature“, 1871, 17. August und 7. September.

***) Vgl. Tyndall, Der Schall, 9. Vorlesung, deutsche Ausgabe, Braunschweig (Vieweg) 1897.

Je nachdem, ob diese die Richtung des freien Falles hat oder ihr entgegengesetzt ist, unterscheiden wir den vertikalen Wurf nach abwärts und nach aufwärts.

Bezeichnen wir den Betrag der Anfangsgeschwindigkeit mit u, so gelten für den **vertikalen Wurf nach abwärts** die einfachen Beziehungen

$$s = ut + \tfrac{1}{2}gt^2, \quad v = u + gt. \tag{87}$$

Der vertikale Wurf nach abwärts verläuft, wie es ja selbstverständlich ist, rascher als der freie Fall, mit größerer Geschwindigkeit und unter Zurücklegung größerer Fallräume in gleichen Zeiten.

Für den **vertikalen Wurf nach aufwärts** ist in den Gleichungen (87) das Pluszeichen durch ein Minuszeichen zu ersetzen. Für den Wurf in die Höhe gelten also die Beziehungen

$$s = ut - \tfrac{1}{2}gt^2, \quad v = u - gt, \tag{88}$$

wobei aber jetzt Weg und Geschwindigkeit nach aufwärts positiv zu rechnen sind.

Da sich der Körper solange aufwärts bewegt, bis seine Geschwindigkeit null geworden ist, so folgt aus den Gl. 88 für die **Steigzeit**

$$t^* = \frac{u}{g} \tag{89}$$

und hieraus für die **Steighöhe**

$$s^* = \frac{u^2}{2g}. \tag{90}$$

Die Wurfgeschwindigkeit, die zu der Erreichung einer bestimmten Steighöhe erforderlich ist, ist also ebenso groß wie die Endgeschwindigkeit, die ein Körper bei dem freien Fall durch die Steighöhe erlangt.

Nachdem der vertikal nach aufwärts geworfene Körper die Steighöhe erreicht hat, bewegt er sich im freien Fall wieder nach abwärts. Er passiert (wenn kein merklicher Widerstand vorhanden ist) jede Stelle mit derselben Geschwindigkeit bei der Aufwärts- und der Abwärtsbewegung und kommt nach Ablauf der doppelten Steigzeit (seit Beginn der Wurfbewegung) wieder an der Ausgangsstelle an.

Mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 500 m/sec, wie sie Gewehrkugeln haben, würde ein Körper ungefähr 50 Sekunden lang bis zu einer Höhe von etwa 12 km steigen.

§ 73. Der horizontale Wurf.

Wenn die Wurfrichtung anders als vertikal ist, so hat, wie schon in einem früheren Abschnitt (§ 11) gezeigt wurde, die **Wurfbahn** eine **parabolische Gestalt**. Ist im besonderen die Wurfrichtung

horizontal, so liegt der Scheitel der Parabel im Ausgangspunkt der Wurfbewegung; die **Achse** der Parabel ist wie stets bei der Wurfbewegung **vertikal** (Fig. 84).

Da die vertikale Teilbewegung von der horizontalen vollkommen **unabhängig** ist, so braucht bei dem horizontalen Wurf ein Körper dieselbe Zeit zur Zurücklegung eines vertikalen Höhenunterschiedes wie bei dem freien Fall. Dies läßt sich anschaulich mittels des in

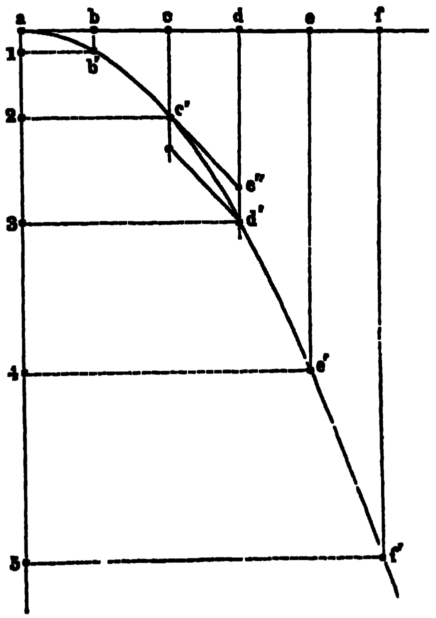


Fig. 84. Horizontaler Wurf.

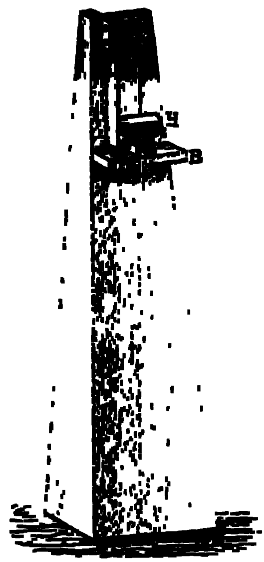


Fig. 85.

Fig. 85 wiedergegebenen Apparates zeigen. Ein Hammer (H) schlägt, wenn man ihn hebt und fallen läßt, gegen eine Blattfeder (F). Dadurch wird einerseits die bis dahin zwischen der Blattfeder und dem Klotz K eingeklemmt gewesene Kugel O losgelassen, andererseits eine andere vor der Blattfeder liegende Kugel fortgeschleudert. Der Versuch zeigt in der Tat, daß beide Kugeln gleichzeitig auf die horizontale Tischplatte auffallen, auf die man den Apparat stellt.

§ 74. Der schiefe Wurf.

Bei dem **schiefen Wurf** wird der Winkel, den die Wurfrichtung mit der Horizontalen einschließt, der **Elevationswinkel** genannt; Steigdauer und Steighöhe hängen mit ihm und der Wurfgeschwindigkeit u, wie einfache mathematische Überlegungen zeigen, durch die Beziehungen zusammen

$$t^* = \frac{u}{g} \sin\alpha \tag{91}$$

und

$$h = \frac{u^2}{2g} \sin\alpha . \tag{92}$$

Für $\alpha = 90°$ gehen diese Gleichungen natürlich in die früheren Gl. 89 und 90 über. Die vom Ausgangspunkt der Bewegung gemessene Entfernung, in der der geworfene Körper wieder das horizontale Ausgangsniveau erreicht, wird die Wurfweite genannt (Strecke OA in Fig. 86). Für sie gilt die Beziehung

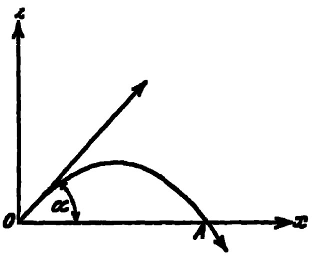


Fig. 86.

$$a = \frac{u^2}{g} \sin(2\alpha) . \tag{93}$$

Selbstverständlich kann von Steigdauer, Steighöhe und Wurfweite nur dann gesprochen werden, wenn die Wurfrichtung schief nach aufwärts geht.

Aus Gl. 93 läßt sich umgekehrt auch wiederum der Elevationswinkel bestimmen, unter dem ein Körper mit einer ihrem Betrage nach gegebenen Wurfgeschwindigkeit geworfen werden muß, um ein in der horizontalen Entfernung a gelegenes Ziel zu erreichen. Dazu muß

$$\sin(2\alpha) = \frac{a g}{u^2} \tag{94}$$

sein.

Wenn nun

$$a > \frac{u^2}{g} \tag{95}$$

ist, dann wird sin (2α) größer als Eins, so daß es dann keinen reellen Winkel gibt, der der Gl. 94 genügt. Das Ziel liegt dann zu weit, als daß es überhaupt mit der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit erreicht werden könnte. Ist andererseits a kleiner als u^2/g, so hat die Gl. 94 stets zwei Lösungen, weil ja zwei Winkel, die einander zu 180° ergänzen, denselben Sinus haben. Stellt daher ein Winkel α eine Lösung der Gl. 94 dar, so muß dies ebenso bei einem Winkel von $(90° - \alpha)$ der Fall sein.

Mit einer gegebenen Wurfgeschwindigkeit kann also ein Ziel mittels zweier verschiedener, zueinander komplementärer Elevationswinkel erreicht werden, mittels einer „steilen“ und einer „flachen“ Bahn (Fig. 87). Wenn im besonderen u^2/g gleich a ist, so fallen beide Werte von α in den einzigen Wert von 45° zusammen; diesem Elevationswinkel entspricht die größte Wurfweite.

Die Wurfbahnen sind für verschiedene Elevationswinkel, jedoch gleiche Anfangsgeschwindigkeiten in Fig. 88 dargestellt. Die einhüllende Kurve aller Wurfbahnen ist selbst eine Parabel mit vertikaler Achse. Punkte, die außerhalb dieser Parabel liegen, können mit der gegebenen Wurfgeschwindigkeit überhaupt nicht erreicht werden. Hat das punktförmig angenommene Ziel die horizontale Koordinate

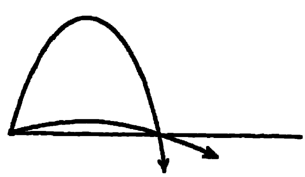


Fig. 87.

x und die vertikale z, so ist der erforderliche Elevationswinkel durch die Gleichung bestimmt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{g}\left(\frac{u^2}{x} \pm \frac{1}{gx}\sqrt{u^4 - 2gzu^2 - g^2x^2}\right). \qquad (96)$$

Zur **experimentellen** Demonstration der Wurfgesetze bedient man sich entweder des schon in einem früheren Abschnitt (§ 20, Fig. 19) beschriebenen Verfahrens der Wasserstrahlen, oder benutzt man einen Apparat, der aus einer Anzahl von Ringen besteht, die man längs einer Parabel anordnet; wird eine kleine Metallkugel mit

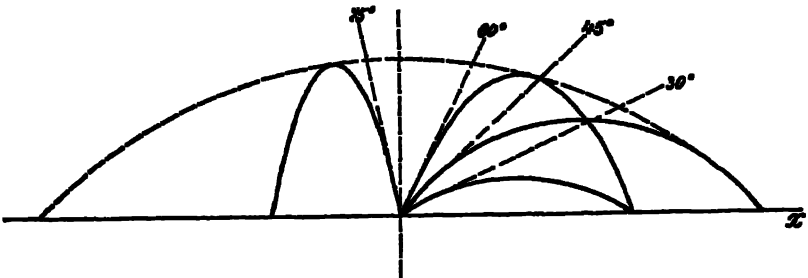


Fig. 88. Schiefer Wurf.

passender Anfangsgeschwindigkeit in der geeigneten Richtung geworfen, so fällt sie der Reihe nach durch sämtliche Ringe. Man kann die Wurfbewegung auch künstlich **verlangsamen**, indem man eine Kugel schräg **auf einer schiefen Ebene** wirft.

Die Bahn ist bei dem schiefen Wurfe allerdings stets nur **angenähert** eine Parabel, weil der **Widerstand der Luft** die Form der Bahn wesentlich beeinflußt; die Bahn besteht infolgedessen nicht aus zwei symmetrischen Zweigen, sondern der absteigende Ast ist stärker geneigt als der aufsteigende. Eingehender soll aber hiervon erst in einem späteren Kapitel die Rede sein, in dem die Bewegung fester Körper in Gasen behandelt werden wird.

Siebentes Kapitel.

Die Zentrifugalkraft.

§ 75. Die Schwungmaschine.

Zur experimentellen Demonstration der für die Zentrifugalkraft geltenden Gesetzmäßigkeiten bedient man sich am besten einer sogenannten Schwungmaschine, wie eine solche in Fig. 89 dargestellt ist. Sie besteht aus zwei Rädern mit parallelen Achsen, einem größeren Schwungrad (S) und einem kleineren Rade (W), dessen Achse (AA) zum Aufstecken der Demonstrationsvorrichtungen eingerichtet ist. Der Umfang der beiden Räder ist ausgehöhlt; in

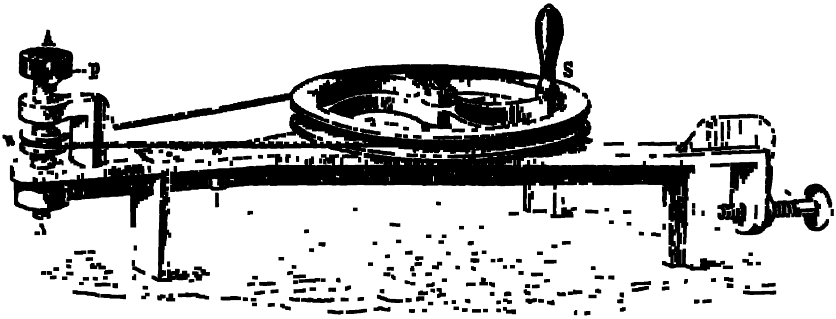


Fig. 89. Die Schwungmaschine.

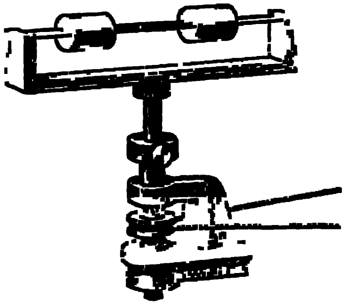
die Höhlungen ist eine Schnur ohne Ende eingelegt, so daß das Rad W mit einer großen Winkelgeschwindigkeit gedreht werden kann. (Diese verhält sich zu der des Schwungrades so wie dessen Radius zu dem des kleinen Rades.) Mittels der Schraube s kann die Schwungmaschine an einen Tisch festgeklemmt und derart im Bedarfsfalle auch in eine vertikale Lage gebracht werden. Die kleine Schraube p dient zum Festklemmen von Nebenapparaten; zu deren Befestigung ist auch eine vertikale Bohrung mit Schraubengewinde (b) vorhanden.

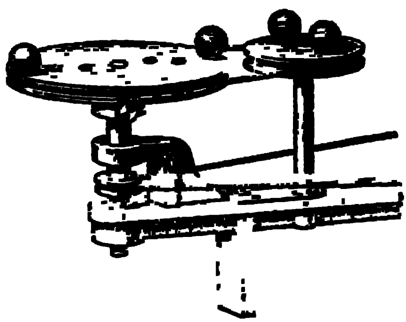
§ 76. Die experimentelle Bestätigung des Gesetzes der Zentrifugalkraft.

Mittels eines einfachen, an der Schwungmaschine durchgeführten Versuches läßt sich zunächst der experimentelle Nachweis dafür erbringen, daß bei gleicher Winkelgeschwindigkeit, also gleicher Umlaufszeit, die Zentrifugalkraft dem Produkt aus Masse und Radius proportional ist (gemäß Gl. 29). Man setzt hierzu auf die Achse der Schwungmaschine einen Holzrahmen, in den zwei Drähte gespannt sind, längs deren zwei durchbohrte, durch eine

Schnur verbundene Metallzylinder von ungleicher Masse verschiebbar sind (Fig. 90). Wenn sich die beiden Zylinder auf verschiedenen Seiten der Achse befinden, so muß derjenige, für den die Zentrifugalkraft den größeren Wert hat, den anderen nach sich ziehen.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß bei ursprünglich gleichen Abständen von der Achse der schwerere Körper den leichteren nach sich zieht. Wählt man aber die Abstände so, daß sie sich umgekehrt wie die Gewichte (also umgekehrt wie die Massen) verhalten, so bleiben auch bei raschester Rotation die Körper in Ruhe, weil sich ihre Zentrifugalkräfte wechselseitig aufheben. Sonst gilt allgemein die durch den Versuch bestätigte Beziehung. daß, je nachdem, ob r_2 größer oder kleiner ist als $m_1 r_1/m_2$, die zweite Masse die erste nach sich zieht oder aber von der ersten nachgezogen wird.


Fig. 90.


Fig. 91.

Daß bei gleicher linearer Geschwindigkeit die Fliehkraft dem Radius umgekehrt proportional ist (gemäß der Formel, wonach sie gleich ist $m v^2/r$), läßt sich mittels der in Fig. 91 wiedergegebenen Vorrichtung zeigen. Auf die Achse der Schwungmaschine wird eine Scheibe aufgesetzt, die einige Löcher hat, und überdies wird in das vertikale Schraubengewinde, das in der früheren Fig. 90 mit b bezeichnet worden war, noch eine zweite Achse eingesetzt, die eine kleinere, ebenfalls mit Löchern versehene Scheibe trägt. Verbindet man beide Scheiben durch eine Schnur ohne Ende und setzt an den Rand beider Scheiben kleine Kugeln in die Löcher, so werden zuerst die Kugeln der kleineren Scheibe abgeworfen*).

Eine direkte Messung der Zentrifugalkraft ist mittels der

*) Setzt man nur die größere Scheibe auf die Schwungmaschine auf und besetzt auch deren innere Löcher mit Kugeln, so nimmt man wahr, daß die äußeren Kugeln früher abgeworfen werden als die inneren.

in Fig. 92 wiedergegebenen Vorrichtung möglich. Man benutzt dazu dasselbe Rahmengestell wie bei dem früher beschriebenen Versuch, bringt aber nur eine einzige Kugel g an. Von ihr führt man über eine Rolle i, die an dem rotierenden Gestell befestigt ist, eine Schnur in die hohle Achse und hängt an das Ende der Schnur Gewichte. Es stellt sich dann bei der Rotation Gleichgewicht ein, wenn die Kugel eine bestimmte Entfernung von der Achse hat. Die Messung bestätigt quantitativ die für die Größe der Zentrifugalkraft abgeleitete Formel.

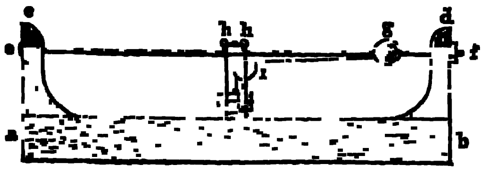


Fig. 92. Messung der Zentrifugalkraft.

Daß die Zentrifugalkraft immer senkrecht zu der Umdrehungsachse gerichtet ist, läßt sich besonders anschaulich mittels des in Fig. 93 abgebildeten Apparates zeigen. Er besteht aus einer Achse x, an deren unterem Ende mehrere elastische Reifen aus Messingblech mittels Scharnieren befestigt sind. Die Reifen laufen in der Hülse h zusammen, die längs der Achse verschiebbar ist.

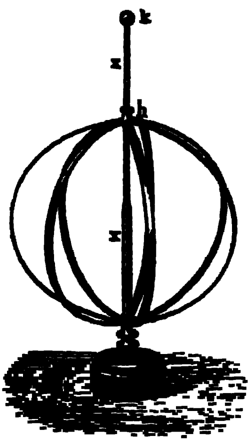
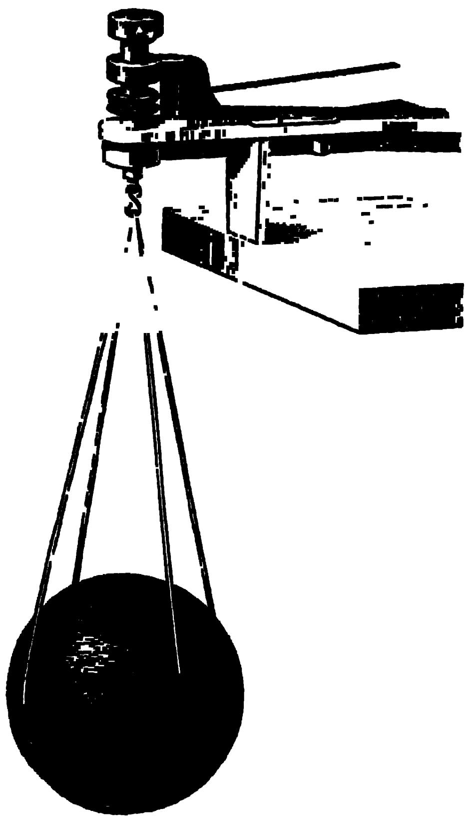


Fig. 93.


Fig. 94.

Infolge der Elastizität der Reifen legt sich im Zustand der Ruhe die Hülse an den Knopf k an. Wird aber die Achse x auf die Schwungmaschine gesetzt und diese in Gang gebracht, so sinkt die Hülse, und unter dem Einfluß der Zentrifugalkraft wird das ursprünglich kugelförmige Reifengebilde zu einem abgeplatteten Ellipsoid deformiert.

Dasselbe Phänomen laßt sich auch mittels einer Tonkugel demonstrieren, die man durch zwei Bandschlingen an die Achse der Schwungmaschine anhängt (Fig. 94). Durch rasche Rotation kann eine Abplattung bis zu etwa $^4/_5$ des äquatorialen Durchmessers herbeigeführt werden, während bei noch rascherer Umdrehung die Tonkugel zerreißt.

§ 77. Das Zusammenwirken von Schwerkraft und Zentrifugalkraft.

Da die Zentrifugalbeschleunigung durch den Ausdruck v^2/ϱ gegeben ist, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser bedeutet, so kann bei genügend großer Geschwindigkeit oder genügend kleinem Halbmesser die Zentrifugalkraft von der Größenordnung der Fallbeschleunigung werden. In solchen Fällen kommen Erscheinungen zustande, die einem Laien zunächst sehr paradox erscheinen.

Das verblüffendste derartige Beispiel stellt die sogenannte Schleifenfahrt („looping the loop") dar, bei der (Fig. 95) ein auf Schienen rollender Wagen von der Plattform A hinabrollt, die kreisförmige Schleife BC der Bahn durchläuft, also teilweise mit den Rädern nach oben, und schließlich auf der Plattform D landet. Bezeichnen wir den Höhenunterschied zwischen der höheren Plattform und dem tiefsten Punkte der Bahn mit h und den Radius der Schleife mit r, so langt der Wagen (wenn wir von den Bewegungshindernissen absehen) im höchsten Punkte der Schleife mit einer Geschwindigkeit an, deren Quadrat nach dem Fallgesetz gleich ist $2g(h-2r)$. Andererseits stellt der Quotient aus dem Geschwindigkeitsquadrat und dem Radius die Zentrifugalbeschleunigung dar. Damit diese größer als die Fallbeschleunigung sei, muß also $2g(h-2r)$ größer als $g \cdot r$ sein oder

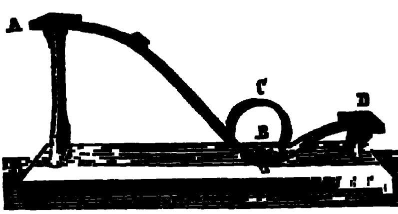
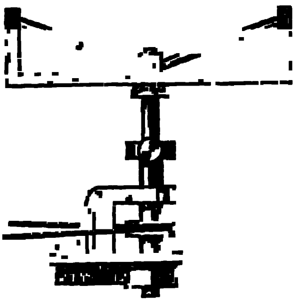


Fig. 95. Die Schleifenfahrt.

$$h > \frac{5}{2} r. \tag{97}$$

Die Fallhöhe muß größer sein als der $1^1/_4$fache Schleifendurchmesser.

Das Emporsteigen schwerer Körper unter dem Einfluß der Zentrifugalkraft läßt sich sehr anschaulich auch durch den in Fig. 96 dargestellten Versuch demonstrieren. Ein Rahmengestell, das auf die Achse der Schwungmaschine aufgesetzt wird, enthält zwei an den Enden verschlossene Glasröhren, die von der Achse der Maschine schräg nach aufwärts gehen. In der einen Rohre befinde sich etwa eine Kugel aus Elfenbein oder schwerem Holz, in der anderen Röhre etwas Quecksilber und gefärbtes Wasser. Sobald die Schwungmaschine in Gang gebracht wird, läuft in der einen Rohre die Kugel in die Höhe; in der anderen Röhre nimmt das Quecksilber die höchste Stelle ein, unterhalb des Quecksilbers sammelt sich das gefärbte Wasser, und unterhalb des Wassers die Luft. Füllt man hingegen die erste Röhre mit Wasser und bringt in sie Kugeln aus leichterem Holz, so werden diese Kugeln während der Rotation durch das schwerere Wasser an die unterste Stelle gedrückt.


Fig. 96.

Sehr anschaulich ist auch ein in Fig. 97 dargestellter Versuch, bei dem ein Petroleumlampenglas mit weitem Bauch auf die Schwungmaschine geschraubt wird. Das Glas wird mit etwas Quecksilber und gefärbtem Wasser gefüllt; solange alles ruht, bleiben die Flüssigkeiten am Boden des Glases. Wird aber die Schwungmaschine in rasche Umdrehung versetzt, so steigen die Flüssigkeiten in den Bauch des Glases, wobei das Quecksilber in der Gestalt eines silbernen Ringes die weiteste Stelle einnimmt und oben und unten durch Ringe von gefärbtem Wasser eingefaßt wird.

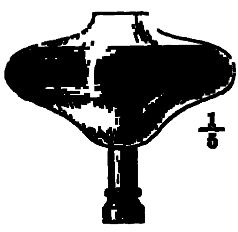
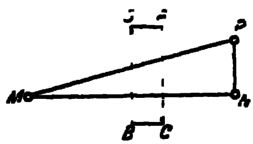


Fig. 97.

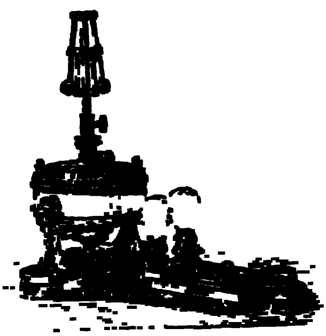
In merklicher Weise kommt die Zentrifugalkraft gegenüber der Schwerkraft auch dann zur Geltung, wenn ein Wagen eine **Bahnkurve** durchfährt. Fährt beispielsweise ein Eisenbahnzug mit einer Geschwindigkeit von 54 km in der Stunde, legt er also in der Sekunde 15 m zurück, und durchfährt er eine Bahnkurve von einem Krümmungshalbmesser von 200 m, so ist die Zentrifugalbeschleunigung 225/200 oder 1,125 m sec^{-2}, also ungefähr der neunte Teil der Fallbeschleunigung. Will man es vermeiden, daß durch die Zentrifugalkraft ein Druck auf die äußere Schiene ausgeübt wird (wodurch eine

stärkere Abnutzung und zugleich auch eine Vergeudung an Zugkraft hervorgerufen würde), so muß man die äußere Schiene derart überhöhen, daß sich die Überhohung zum Schienenabstand ebenso verhält wie die Zentrifugal- zu der Fallbeschleunigung. (In Fig. 98 ist OA die Zentrifugal-, OB die Fallbeschleunigung, und durch die Diagonale OC ist somit die Richtung der Resultierenden bestimmt. Ist nun MN die Schienenbreite und NP die Überhöhung, so ist die Fahrbahn dann zu der resultierenden Kraft senkrecht, wenn NP : MN = OA : OB.) In dem vorhin angeführten Beispiel müßte bei der üblichen Spurweite von 1,435 m die Überhöhung 16,4 cm betragen.


Fig. 98.

Auf denselben Prinzipen wie die Überhöhung der äußeren Bahnschiene beruht die allgemein bekannte Tatsache, daß sich ein Radfahrer bei dem Durchfahren einer Kurve nach innen neigen muß, um nicht das Gleichgewicht zu verlieren.

Sehr deutlich zeigt sich auch das Zusammenwirken von Schwerkraft und Zentrifugalkraft bei dem sogenannten Zentrifugalpendel. Es besteht aus einer vertikalen Stange, an der zwei um ein Gelenk drehbare Pendel in der Form schwerer Kugeln mittels leichter Stangen befestigt sind, so daß sie in ihrer Bewegung konische Pendel darstellen (Fig. 99; der hier abgebildete Apparat wird statt mit der Schwungmaschine mit einem Elektromotor betrieben). Der Winkel, den bei der Rotation die leichten Stangen mit der Vertikalrichtung bilden, ergibt sich gemäß Gl. 74 aus der zu der Umlaufszeit reziproken Tourenzahl.


Fig. 99. Zentrifugalpendel.

§ 78. Technische Anwendungen der Zentrifugalkraft.

Von den zahlreichen Anwendungen, die die Zentrifugalkraft in der Technik findet, sind zunächst die sogenannten Zentrifugen zu erwähnen, die vor allem zur Trennung fester Stoffe von flüssigen dienen. Sie bestehen im wesentlichen aus einer zylindrischen Trommel, deren Wandungen durchsiebt sind. Wird die Trommel mittels geeigneter Antriebsvorrichtungen in rasche Umdrehung versetzt (bis zu einigen Tausend Umdrehungen in der Minute), so schleudert die

Zentrifugalkraft die flüssigen Bestandteile durch das Sieb hinaus, während die festen durch das Sieb zurückgehalten werden.

Derartige Zentrifugen dienen zum Gewinnen des Saftes aus Zuckerrüben, zum Reinigen des Zuckers vom Sirup, zum Trocknen von Wolle und Garn. Zentrifugen können aber auch dazu verwendet werden, um in einem Gemenge verschieden dichter Flüssigkeiten diese voneinander zu scheiden; denn die schwereren entfernen sich weiter von der Achse, während sich die leichteren näher zur Achse ansammeln. Auf diese Weise wird beispielsweise in den Milchzentrifugen der spezifisch leichtere Rahm von der schwereren Magermilch getrennt. Auch bei der Fabrikation von Paraffin, Stärkemehl und Honig sowie in der Gerberei finden Zentrifugen Verwendung.

Das in dem vorigen Abschnitt besprochene Zentrifugalpendel wird technisch als Zentrifugalregulator und als Tourenzähler verwertet. Bei dem Regulator wird die seitliche Bewegungskomponente der Pendel durch ein geeignetes Gestänge auf ein Ventil übertragen, das bei Dampfmaschinen den Dampfzutritt aus dem Dampfkessel zu dem Dampfzylinder regelt. Je rascher sich infolge der Verbindung mit dem Schwungrad das Zentrifugalpendel dreht, um so weniger Dampf wird durch das Ventil eingelassen. Bei dem Tourenzähler (Fig. 100) wird die horizontale Bewegungskomponente des Pendels auf einen Zeiger übertragen, der sich längs einer Skala bewegt. Indem man derartige Tourenzähler mit den Rädern eines Wagens verbindet, kann man den Tourenzähler auch als Geschwindigkeitsmesser oder Tachometer verwenden.

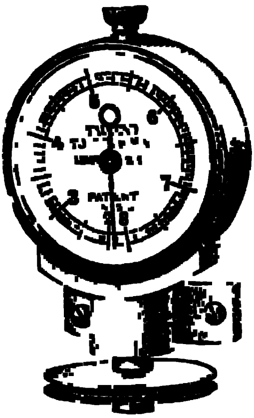


Fig. 100. Tourenzähler.

Achtes Kapitel.

Die Bewegungsvorgänge auf der rotierenden Erde.

§ 79. Die Corioliskraft auf der rotierenden Erde.

Da, wie die einfachste astronomische Beobachtung zeigt, Erde und Fixsternhimmel gegeneinander rotieren, so müssen wir, wofern wir nicht an dem ursprünglichen, naiven geozentrischen Standpunkt festhalten wollen, annehmen, daß sich auf der rotierenden Erde jene Zusatzkräfte offenbaren, zu deren Erkenntnis die

Betrachtung der Relativbewegung führt. Wie schon in einem früheren Abschnitt (§ 35) gezeigt wurde, hängen diese von der als Vektor aufzufassenden Winkelgeschwindigkeit ab, mit der die Rotation erfolgt.

Der Betrag dieser Winkelgeschwindigkeit ergibt sich bei der Erdrotation in dem üblichen Maße von reziproken Sekunden, indem man die Zahl 2π durch die Zahl der Sekunden im Tag dividiert. Es ist also

$$w = 7{,}272 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{sec}^{-1}. \tag{98}$$

Da die Richtung der Winkelgeschwindigkeit definitionsgemäß mit der der Rotationsachse übereinstimmen muß, so muß der von einem beliebigen Punkte der Erdoberfläche aus errichtete Vektor der Winkelgeschwindigkeit immer der Erdachse parallel sein. Der Richtungssinn ergibt sich schließlich aus der definitionsgemäßen Forderung, daß die Rotation, von der Spitze des Vektors gesehen, entgegen dem Uhrzeiger erfolgen soll. Da sich die Erde von West nach Ost dreht, ist somit der Richtungssinn durch die Richtung vom Südpol zum Nordpol festgelegt; denn vom Nordpol gesehen, erscheint die Erddrehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt.

Für einen beliebigen Punkt der Erdoberfläche erhalten wir nun bekanntlich die Richtung der Erdachse, indem wir in der Meridianebene eine Gerade errichten, die mit der Horizontalebene einen Winkel einschließt, der der geographischen Breite des betreffenden Ortes gleich ist. Dies ist zugleich die Richtung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit, und sein Richtungssinn ergibt sich nach dem früher Gesagten derart, daß er stets schräg von Süd nach Nord und zwar auf der nördlichen Erdhälfte immer nach oben, auf der südlichen Halbkugel hingegen immer nach unten, also zum Boden, weist. Auf dem Äquator ist der Vektor, der die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation darstellt, genau horizontal.

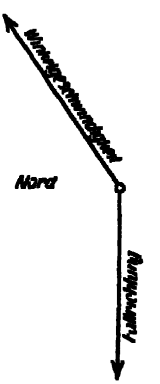


Fig. 101.

Für die Coriolis-Kraft ergeben sich Richtung und Richtungssinn gemäß der früheren Fig. 33. Betrachten wir etwa das später eingehender zu erörternde Beispiel des freien Falls, so hat die Relativgeschwindigkeit immer eine vertikale, nach abwärts weisende Richtung. Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit weist nach oben oder unten, je nachdem ob wir uns auf der nördlichen oder südlichen Erdhälfte befinden, stets aber schräg von Süd nach Nord (Figg. 101

und 102). Nach § 35 muß nun der Vektor der Coriolis-Kraft so gerichtet sein, daß von seiner Spitze diejenige Drehung im Sinne des Uhrzeigers erscheint, die auf kürzestem Wege den Vektor der Winkelgeschwindigkeit in die Richtung der Relativbewegung überführt. Sowohl in Fig. 101, die sich auf die nördliche Erdhälfte, als auch in Fig. 102, die sich auf die südliche bezieht, ist also die Coriolis-Kraft nach rückwärts, in Wirklichkeit demnach **ostwärts** gerichtet.

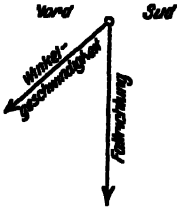


Fig. 102.

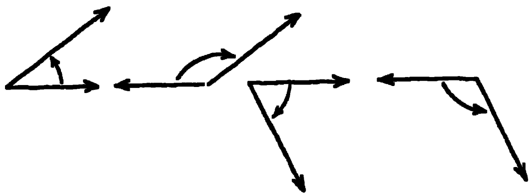


Fig. 103.

Ist die Bewegung auf der Erde **horizontal**, so muß wiederum der die Coriolis-Kraft darstellende Vektor eine solche Richtung haben, daß von seiner Spitze gesehen, diejenige Drehung entgegengesetzt dem Uhrzeiger erscheint, die auf kürzestem Wege die horizontale Bewegungsrichtung in die Richtung der Winkelgeschwindigkeit überführt. Auf der nördlichen Erdhälfte geht diese Drehung nach aufwärts, auf der südlichen nach abwärts (Fig. 103). Eine Aufwärtsdrehung aus einer horizontalen Richtung erscheint aber nun einem Zuschauer dann entgegengesetzt dem Uhrzeiger, wenn er sich **rechts** von der horizontalen Bewegungsrichtung befindet (wie die Betrachtung der Fig. 103 zeigt). Umgekehrt erscheint eine Abwärtsdrehung aus einer horizontalen Richtung dann entgegengesetzt dem Uhrzeiger, wenn der Zuschauer **links** von der horizontalen Bewegungsrichtung steht. Auf der **nördlichen** Halbkugel sucht also die Coriolis-Kraft jede Horizontalbewegung **nach rechts**, auf der südlichen Halbkugel hingegen **nach links seitlich abzulenken**.

Für den **Betrag** der Coriolis-Kraft gilt nach der früheren Gl. 31 allgemein die Beziehung

$$K_{Cor}/m = 2 w v \sin \vartheta, \tag{99}$$

wenn ϑ der Winkel ist, den die Richtung der Erdachse mit der Bewegungsrichtung einschließt. Im Spezialfall des freien Falls wird $\sin \vartheta$ gleich $\cos \psi$, wenn ψ die geographische Breite bedeutet. Im Sonderfall einer Horizontalbewegung, die in der Meridianebene erfolgt, wird $\sin \vartheta$ gleich $\sin \psi$.

§ 80. Die Zentrifugalkraft der Erdrotation.

Die Führungskraft, die bei der Erdrotation gemäß der Theorie der Relativbewegung als zweite Zusatzkraft zur Geltung kommen muß, erweist sich nach der früheren Gl. 50 als identisch mit der durch die Erdrotation hervorgerufenen Zentrifugalkraft. Da das auf die Erdachse gefällte Lot gleich ist dem Produkt aus dem Erdradius (etwa 6370 km) und dem Kosinus der geographischen Breite, so gilt nach den Gl. 50 und 86 für die Zentrifugalkraft der Erdrotation die Beziehung

$$K_t/m = 3{,}368 \cdot \cos^2\psi \ \text{cm sec}^{-2}. \tag{100}$$

Den größten Wert erreicht die Zentrifugalkraft also am Äquator, während sie an den Polen verschwindet. Für den Äquator wird die Zentrifugalbeschleunigung ungefähr dem dreihundertsten Teile der Fallbeschleunigung gleich. Infolge der Erdrotation muß also der beobachtbare Wert der Fallbeschleunigung von der geographischen Breite abhängen. Allerdings äußert sich die Erdrotation auch noch auf andere Weise, indem ihre Folge eine Abplattung der Erde ist, die wiederum ihrerseits die Fallbeschleunigung von der geographischen Breite abhängig erscheinen läßt. Da die Zentrifugalkraft anders als die Schwerkraft gerichtet ist, so ruft die Erdrotation auch eine Abweichung der Lotrichtung von der zu dem Erdmittelpunkt führenden Vertikalrichtung hervor. Eingehender soll jedoch der Einfluß der Erdrotation auf die beobachtbare irdische Schwere erst in einem späteren Kapitel behandelt werden.

§ 81. Die östliche Fallabweichung.

Bei dem freien Fall muß die stets ostwärts gerichtete Coriolis-Kraft eine östliche Abweichung von der Lotrichtung bewirken, die ihrerseits durch die Resultierende aus Schwerkraft und Zentrifugalkraft bestimmt ist. Für die östliche Abweichung ergibt die Integration der Gl. 99 unter Benutzung der Fallgesetze die Beziehung

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}} w \cos\psi, \tag{101}$$

wenn mit h die Fallhöhe bezeichnet wird. Setzen wir für w und g die entsprechenden Werte ein, so finden wir

$$x = 2{,}189 \cdot 10^{-6} h \sqrt{h} \cos\psi \ \text{(in cm)}. \tag{102}$$

Bei einer Fallhöhe von 100 m würde danach in der geographischen Breite von Wien oder Paris (48°) eine Abweichung von 1,46 cm folgen.

Die östliche Fallabweichung wurde in exakter Weise zuerst von Benzenberg (1804) nachgewiesen und gemessen*). Genauere Messungen stammen von Reich (1831). Er stellte seine Versuche bei einer Fallhöhe von 158,54 m in einem Bergwerksschacht in Freiberg in Sachsen an, unter einer geographischen Breite von 50°57′. Bei diesen Versuchen hätte nach Gl. 102 die östliche Abweichung 27,5 mm betragen müssen, während Reich als Mittelwert aus seinen zahlreichen Beobachtungen 28,4 mm erhielt**). Zwischen Theorie und Experiment ergab sich also eine nahe Übereinstimmung. Reichs Versuche sind später noch oft wiederholt worden, so am Eiffelturm in Paris und in neuerer Zeit von Hall in Cambridge in den Vereinigten Staaten (1902).

Für den vertikalen Wurf nach aufwärts ergibt die Theorie, daß während des Aufstieges eine westliche Abweichung eintreten muß; die Folge davon ist, daß ein vertikal in die Hohe geworfener Körper westlich von dem Aufstiegsorte niederfällt. Die resultierende westliche Abweichung ergibt sich viermal so groß wie die östliche Abweichung bei dem freien Fall durch die gleiche Höhe. Eine experimentelle Prüfung dieses theoretischen Ergebnisses erweist sich allerdings als schwer möglich.

§ 82. Die seitliche Ablenkung von horizontalen Bewegungen.

Infolge der Coriolis-Kraft suchen, wie schon erwähnt wurde, horizontale Bewegungen auf der nördlichen Erdhälfte nach rechts, auf der südlichen nach links abzubiegen. Dies zeigt sich in größtem Maßstabe bei den Passatwinden.

In den Tropen steigt die durch die Erwärmung verdünnte Luft als ein ungeheurer Strom vertikal nach aufwärts, um nach den Polen abzufließen, während andererseits, den Kreislauf schließend, in den tieferen Regionen kältere Luft dem Äquator zuströmt. Auf der nördlichen Halbkugel müßte daher, wenn die Erde nicht rotieren würde, der Passat als Nordwind, auf der südlichen Halbkugel hingegen als Südwind auftreten. Infolge der Erdrotation hat aber der Passat auf der nördlichen Erdhälfte die Tendenz, nach rechts, also gegen Westen, abzubiegen, und er verhält sich demnach so, als ob er von Nordosten kommen würde; er tritt als Nordostpassat auf, und auf der südlichen Halbkugel als Südwestpassat. Umgekehrt ist der von dem Äquator zu den Polen in den höheren Regionen

*) Benzenberg stellte seine Versuche zuerst im Michaelisturm in Hamburg an.

**) E. Reich, Fallversuche, Freiberg 1831.

strömende sogenannte Antipassat auf der nördlichen Halbkugel ein Südwest- und auf der südlichen Hemisphäre ein Nordostwind.

Auch Meeresströmungen zeigen die Tendenz, auf der nördlichen Erdhälfte nach rechts und auf der südlichen nach links abzubiegen. Eine Folge der seitlichen Ablenkung ist vielleicht auch die als Bärsches Gesetz*) bezeichnete Tatsache, daß auf der nördlichen Hemisphäre die rechten Ufer vieler Flüsse mehr ausgewaschen sind als die linken.

Eine seitliche Ablenkung ist auch bei Geschossen zu erwarten; allerdings ist sie zu gering, als daß sie bei den zahllosen störenden Nebeneinflüssen, die hierbei auch noch in Betracht kommen, exakt gemessen werden könnte. In dem speziellen Falle, daß es sich um eine Horizontalbewegung in der Meridianebene handelt, ergeben theoretische Überlegungen für die seitliche Ablenkung den Wert

$$x = vt^2 w \sin \psi, \tag{103}$$

wenn v die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, w die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung (vgl. Gl. 98) und t die in Sekunden gemessene Flugzeit. Bei einer Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses von 500 m/sec beträgt demnach die seitliche Ablenkung in der geographischen Breite von Wien nach einer Sekunde 2,7 cm, bei einer Flugzeit von zwei Sekunden ist sie viermal so groß und so fort.

§ 83. Der Pendelversuch von Foucault.

Am anschaulichsten und überzeugendsten äußert sich der Einfluß der Erdrotation auf die irdischen Bewegungsvorgänge in der bekannten Erscheinung des Foucaultschen Pendels. Aus theoretischen Überlegungen folgt, daß sich die Schwingungsebene eines Pendels, das sich ohne eine seitliche Anfangsgeschwindigkeit bewegt, für einen irdischen Beobachter drehen muß, und zwar in einem Tage um einen Winkel, der sich durch Multiplikation von 360° mit dem Sinus der geographischen Breite ergibt. Dabei erfolgt die Drehung in solchem Sinne, daß sie auf der nördlichen Erdhälfte, von oben gesehen, im Sinne des Uhrzeigers vor sich geht.

Wenn auch die exakte Ableitung dieser Ergebnisse der Theorie hier übergangen werden muß, so lassen sie sich doch leicht an der Hand der Fig. 104 begreifen. Es sei x a b z der Parallelkreis, in dem der Pendelversuch angestellt wird; m sei das Zentrum dieses Parallelkreises. Das Pendel schwinge in der Meridianebene und zwar

*) v. Bär, Bull. de l'acad. imp. des sciences de Petersbourg, tome II, 1860, S. 357.

zunächst im Punkte a, durch den der Meridiankreis NalS hindurchgehe. Die Schwingungsrichtung sei durch den Pfeil cd gegeben. Eine im Punkte a an den Meridian gelegte Tangente schneide die verlängerte Erdachse im Punkte o, wobei der Winkel oam natürlich der geographischen Breite (ψ) gleich ist.

Nach einiger Zeit, die (in Sekunden gemessen) mit t bezeichnet werde, sei der Ort der Erdoberfläche, der sich vorhin an der Stelle a

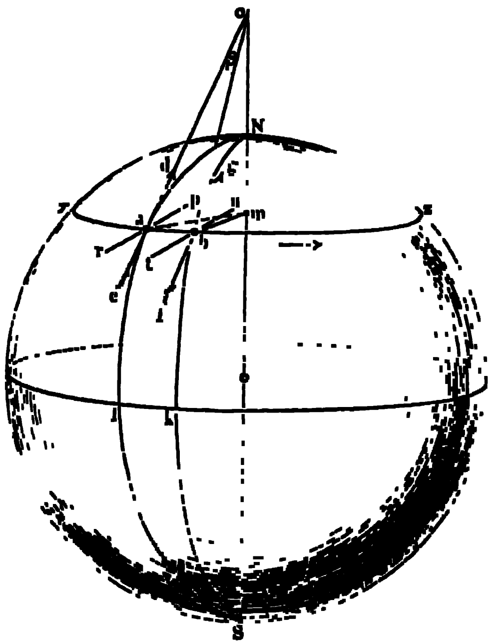


Fig. 104. Zum Pendelversuch von Foucault.

befand, an die Stelle b gelangt. Die an dieser Stelle an den Meridian (nunmehr NbkS) gelegte Tangente schneidet die verlängerte Erdachse in demselben Punkte o. Nun ist

$$\sphericalangle amb = wt. \tag{104}$$

Bezeichnen wir andererseits mit β den Winkel aob, so gilt, weil es sich um zwei gleichschenklige Dreiecke und kleine Winkel handelt, die Proportion

$$\beta : wt = bm : bo; \tag{105}$$

also

$$\beta = wt \sin \psi. \tag{106}$$

Ebenso groß wie der Winkel aob ist aber auch der Winkel, den die durch den Punkt b parallel zu cd gelegte Pfeilrichtung fg mit dem durch b gehenden Meridian einschließt. Auch dieser Winkel ist durch

die Gl. 106 bestimmt, und dasselbe würde natürlich auch für die Differenz gelten, um die sich ein Winkel ändern würde, den etwa schon im Punkte a die Schwingungsrichtung (rp) mit der Meridianebene gebildet hätte.

Der dem Nachweis der Erdrotation dienende Pendelversuch ist zuerst von Foucault im Jahre 1850 durchgeführt worden, und zwar zunächst in einem Kellergewölbe. Bei den ersten Experimenten bestand das Pendel aus einem Stahldraht von etwa 1 mm Durchmesser und 2 m Länge, an dem eine gut polierte Messingkugel von 5 kg Gewicht hing. Unten war diese Kugel mit einer feinen Spitze versehen, die eine genaue Markierung der Schwingungsbahn ermöglichte. An der Spitze wurde zugleich auch eine feine Schleife angebracht, mittels deren das Pendel vor Beginn des Versuches an einer Wand befestigt wurde. Diese Schleife wurde dann bei Versuchsbeginn vorsichtig durchgebrannt, um jeden seitlichen Impuls zu vermeiden; denn ein solcher würde natürlich durch Herbeiführung einer sphärischen Pendelbewegung (vgl. die frühere Fig. 67 in § 63) ebenfalls eine allmähliche Drehung der Schwingungsebene verursachen.

Foucault hat später seinen Versuch mit viel längeren Pendeln durchgeführt, und auch außerhalb von Paris wurde er zahllose Male wiederholt, mit Pendellängen bis zu 100 Metern und darüber. Die Drehung der Schwingungsebene beträgt in der Breite Mitteleuropas bereits nach ungefähr zehn Minuten zwei Grad. Sie wird immer größer und größer; doch läßt sie sich natürlich nicht beliebig lang messen, weil einerseits die Amplitude der Schwingungen ständig abnimmt, andererseits die lineare Schwingung, da sich ein seitlicher Impuls doch nie völlig ausschließen läßt, allmählich in eine sphärische Schwingung übergeht.

Bei geeigneter Versuchsanordnung läßt sich Foucaults Experiment übrigens auch in einem Zimmer demonstrieren und sogar messend verfolgen*). Mit einem besonders vervollkommneten derartigen Apparat konnte Kamerlingh-Onnes die stündliche Drehung außerordentlich genau messen**). Er fand hierfür aus zwei Versuchsreihen 12,04° und 11,99°, während aus der Theorie für den Beobachtungsort Groningen ein Wert von 12,03° folgt.

Bemerkenswert ist unter den neueren Apparaten zum Nachweis des Foucaultschen Phänomens besonders ein von Edelmann

---

*) Vgl. z. B. Weinhold, Physikalische Demonstrationen. 2. Aufl. Leipzig 1887.

**) Ned. Arch. v. Wiskunde 1879 und 1880.

konstruierter Apparat, der in Fig. 105 abgebildet ist. Das Pendel besteht aus einer schweren Linse (L), die an der Achse DN befestigt ist. Das Pendel hängt mittels eines langen (in der Figur nur angedeuteten) Fadens (efg) an einer besonders konstruierten Aufhängevorrichtung. Den eigentlichen Gegenstand der Untersuchung bildet die schwingende Bewegung der unteren Spitze (N) der Pendelachse. Unter das Pendel wird nun ein auf einem Dreifuß ruhender Apparat mit einer leicht beweglichen Achse (mn) gestellt, die einen Spiegel trägt. Überdies trägt die Achse einen Seitenarm aus Aluminium, der in eine kurze Schneide aus weichem Eisen (F) endet. Die obere Spitze der beweglichen Achse (W) wird genau unterhalb der Ruhelage der Pendelspitze N eingestellt. Ist nun die Pendelachse magnetisch, so stellt sich die Eisenschneide F immer in die Schwingungsrichtung der unteren Pendelspitze ein. Die Drehung der Schwingungsebene hat daher eine gleich große Drehung der Achse mn zur Folge, und diese Drehung kann mittels des Spiegels, eines Fernrohrs und einer Skala in üblicher Weise leicht gemessen werden. So erhält man beispielsweise bei einem Skalenabstand von 4 m nach fünf Minuten bereits eine Ablenkung von 11 cm.

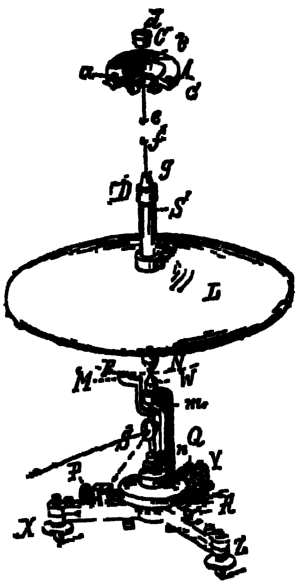


Fig. 105. Foucaultsches Pendel nach Edelmann.

Neuntes Kapitel.

Die Gravitation.

§ 84. Die Schwere des Mondes.

Unter den Bewegungsvorgängen, die sich am Himmel abspielen, ist (wenn man von der durch die Erdrotation vorgetäuschten täglichen Drehung des Fixsternhimmels absieht) der einfachste der monatliche Umlauf des Mondes um die Erde. Die von dem Monde hierbei beschriebene Bahn ist nahezu kreisförmig, und das Zentrum der Bahn fällt nahezu mit der Erde zusammen. Die durchschnittliche Umlaufszeit beträgt etwa 27⅓ Tage oder ungefähr 2 360 000 Sekunden. Was den Radius der Bahn betrifft, so wußten schon im Altertum die Astronomen, daß er 60mal so groß wie der

Erdradius ist*), und seit einer genauen, um 1670 durch Picard durchgeführten Gradmessung war auch der Wert des Erdradius recht genau bekannt. Der durchschnittliche Abstand des Mondes von der Erde beläuft sich derart auf 384 400 km**).

Berechnen wir hieraus die Zentripetalbeschleunigung der Mondbewegung (indem wir in dem Ausdruck $4\pi^2 r T^2$ für r und T die Werte in Zentimetern und Sekunden einsetzen), so finden wir für diese Beschleunigung

$$\gamma = 0{,}272 \text{ cm sec}^{-2}. \qquad (107)$$

Vergleichen wir diesen Wert mit dem der Fallbeschleunigung g, so ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{g}{\gamma} = 3600. \qquad (108)$$

Es ist nun jedenfalls unwahrscheinlich, daß die Kraft, die allen Körpern die Fallbeschleunigung erteilt und die auf den höchsten Bergen ebenso wirksam ist wie in der Ebene, nicht auch in der Umgebung der Erde wirksam sein sollte; wir werden allerdings annehmen müssen, daß sie sich mit wachsender Entfernung abschwächt. Andererseits zeigt die letzte Gleichung, daß die Kraft, die die Zentralbewegung des Mondes hervorbringt, dem Monde eine Beschleunigung erteilt, die gegenüber der irdischen Fallbeschleunigung im Verhältnis 1 : 3600 verkleinert ist, während die Entfernung von dem Erdzentrum dem 60fachen Erdradius gleich ist. Es liegt daher der Gedanke nahe, die auf den Mond wirkende Zentralkraft mit der irdischen Schwere zu identifizieren und zugleich anzunehmen, daß diese Kraft im umgekehrt quadratischen Verhältnis mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt abnimmt.

§ 85. Der Versuch von Jolly.

Daß eine und dieselbe Masse tatsächlich in verschiedenen Höhen verschiedenes Gewicht hat, hat durch eine Reihe von Versuchen zuerst Ph. v. Jolly im Jahre 1878 experimentell nachgewiesen. Der Grundgedanke der Jollyschen Versuche ist aus Fig. 106 ersichtlich, die den Versuch in seiner ursprünglichen Form wiedergibt.

Auf eine Tischplatte, die an der Wand eines Laboratoriums

---

*) Genauer 60,3 mal.

**) Wegen der Elliptizität der Bahn und der durch die Sonne verursachten Störungen schwankt allerdings die Entfernung des Mondes während eines Umlaufs um etwa 15000 bis 27000 km (vgl. § 114).

5,3 m hoch über dem Fußboden angebracht war, wurde eine Wage gestellt, deren Kasten durchbohrt war. Durch die Bohrlöcher gingen bis zum Boden Drähte, die an den Wagschalen befestigt waren und die an ihren unteren Enden wiederum Wagschalen trugen. Die Wage wurde dann auf jeweils zwei, auf verschiedenen Seiten liegenden Schalen mit gleichen Gewichtsstücken belastet und abgeglichen, wobei abwechselnd entweder beide Gewichte auf die oberen Schalen gelegt wurden oder eines nach oben und das andere nach unten.

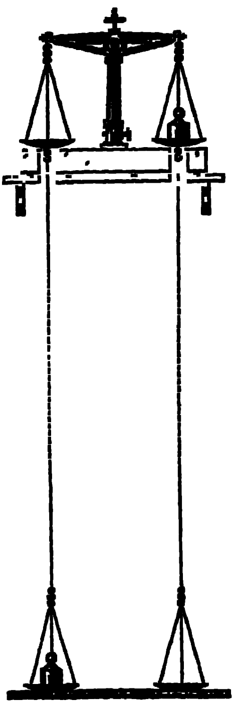


Fig. 106.
Der Versuch von Jolly.

Die Versuche zeigten in der Tat eine Verminderung des Gewichtes mit zunehmender Höhe. Bei dem angegebenen Höhenunterschied von 5,3 m erwies sich ein Kilogrammgewicht in der Hohe um 1,51 mg leichter als auf dem Boden. Andererseits ergibt die Annahme einer zu dem Abstand vom Erdmittelpunkt umgekehrt quadratischen Proportionalität die Beziehung

$$\frac{P - \Delta P}{P} = \frac{(r + \Delta r)^2}{r^2} \qquad (109)$$

(wenn mit P das Gewicht und mit r die Entfernung vom Erdmittelpunkt, mit ΔP und Δr die Änderungen dieser Größen bezeichnet werden). Da jedesfalls $(\Delta r)^2$ neben den anderen Größen vernachlässigt werden kann, wird somit

$$\frac{\Delta P}{P} = -2\frac{\Delta r}{r}. \qquad (110)$$

Nun beträgt der Erdradius im Mittel etwa 6370 km, und es müßte somit nach dieser Gleichung einer Erhöhung um 1 m eine Verminderung eines Kilogrammgewichtes um 0,314 mg entsprechen. Bei einem Höhenunterschied von 5,3 m sollte daher die Gewichtsverminderung 1,66 mg betragen, womit der von Jolly aufgefundene Wert von 1,51 mg recht gut übereinstimmt. Die geringe Abweichung erklärt sich wohl durch den nicht berücksichtigten Einfluß umgebender Massen.

Jolly hat später seine Versuche bei einem Höhenunterschied von 21 m wiederholt und hierbei Quecksilbermassen von 5 kg benutzt; er erhielt eine Gewichtsdifferenz von 31,69 mg, was, auf einen

Höhenunterschied von 1 m und 1 kg reduziert. in besserer Übereinstimmung 0,302 mg (statt 0,314) ergibt.

Jollys Messungen wurden nach verbesserten Verfahren von zahlreichen Forschern wiederholt. So fanden, auf 1 m und 1 kg bezogen, Thiesen (1890) 0,278, Richarz und Krigar-Menzel (1894) 0,279, Scheel und Diesselhorst 0,295 mg*). Immerhin ist die Höhenänderung des Gewichtes groß genug, um bei sehr genauen Wagungen berücksichtigt werden zu müssen; es muß hierbei darauf gesehen werden, daß sich die Schwerpunkte der beiden Gewichte in gleicher Höhe befinden, da ein Hohenunterschied von nur 3 cm bereits eine Gewichtsdifferenz von 0,01 mg pro Kilogramm ergibt.

§ 86. Die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung.

Wenn wir nicht der Erde eine Sonderstellung im Weltall einräumen wollen, müssen wir wohl annehmen, daß ebenso wie die Erde auch die anderen Himmelskörper Objekte, die sich auf ihrer Oberfläche oder in ihrer Umgebung befinden, mit einer Kraft anziehen, die dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Machen wir eine solche Annahme zunächst bei der Sonne, so werden wir folgern müssen, daß die Normalbeschleunigungen, durch die die Planeten in ihren Bahnen um die Sonne erhalten werden, dem Quadrate der Entfernung von der Sonne umgekehrt proportional sind. Daß dies in der Tat zutrifft, geht aus den beobachtbaren Gesetzmäßigkeiten der Planetenbewegungen hervor, die einen exakten Ausdruck zuerst in den bekannten drei Keplerschen Gesetzen gefunden haben.

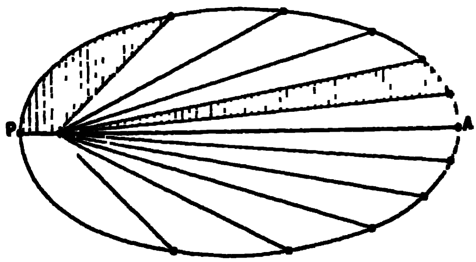


Fig. 107. Erstes und zweites Keplersches Gesetz.

Das erste Keplersche Gesetz lehrt, daß der von der Sonne zu einem Planeten gezogene Radiusvektor in gleichen Zeiten stets gleiche Flächen durchstreicht. Das zweite Keplersche Gesetz**) sagt aus, daß die Planetenbahnen Ellipsen sind, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet (vgl. Fig. 107).

---

*) Vgl Ph. v. Jolly, Die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation. München 1878 und 1881. Ferner F. Richarz und O. Krigar-Menzel, Abh. d. Berl. Akad. 1898.

**) Bisweilen ist auch die Numerierung der beiden Gesetze umgekehrt.

Zu diesen beiden im Jahre 1609 veröffentlichten Gesetzen fügte Kepler zehn Jahre später, im Jahre 1619, noch ein drittes*) hinzu, demzufolge sich die Quadrate der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten wie die dritten Potenzen der großen Achsen ihrer Bahnen verhalten.

Das Gesetz der die Planetenbewegungen beherrschenden Kraft ist aus den Keplerschen Gesetzen zuerst von Newton (1687) auf rein mathematischem Wege abgeleitet worden. Nach rein kinematischen Beziehungen, die schon in § 10 besprochen und von Newton aufgefunden wurden, folgt nämlich zunächst aus dem ersten Keplerschen Gesetz, daß die Beschleunigung zu dem festen Bezugspunkt gerichtet ist, von dem aus der Radiusvektor gezogen werden muß, damit er sich mit konstanter Flächengeschwindigkeit bewege; daß also die Beschleunigung der Planeten stets gegen die Sonne gerichtet ist.

Aus den geometrischen Eigenschaften der Ellipse folgt wiederum, wie Newton bewies, daß die bei der Bewegung in der elliptischen Bahn vorhandene Beschleunigung dem Quadrate der jeweiligen Entfernung von der Sonne umgekehrt proportional ist.

Aus dem dritten Keplerschen Gesetz konnte schließlich Newton es ableiten, daß die Beschleunigung, die die Sonne an einem Planeten hervorbringt, nur von der Entfernung abhängt, hingegen von allen individuellen Eigenschaften des Planeten unabhängig ist. Bezeichnen wir nämlich das für alle Planeten konstante Verhältnis zwischen der dritten Potenz der halben großen Achse und dem Quadrate der Umlaufszeit mit C, so wird die Beschleunigung für einen beliebigen Ort und einen beliebigen Augenblick

$$b = \frac{4\pi^2 C}{r^2}, \tag{111}$$

wenn r die Entfernung von der Sonne bedeutet.

Über die Genauigkeit, mit der das dritte Keplersche Gesetz erfüllt ist, gibt Tab. VI eine Übersicht, in der für die zu Keplers Zeiten bekannt gewesenen Planeten die Werte der halben großen Achse und der Umlaufszeiten (auf die halbe große Achse der Erdbahn und das Erdjahr als Einheit bezogen) zusammengestellt sind.

---

*) Die ersten zwei Gesetze veröffentlichte Kepler in seiner „Astronomia nova“, das dritte in der „Harmonice mundi“.

Tabelle VI.

Planet	halbe große Achse (a)	Umlaufszeit T	a^3	T^2
Merkur .	0,387	0,241	0,058	0,058
Venus . .	0,723	0,615	0,378	0,378
Erde . . .	1,000	1,000	1,000	1,000
Mars . .	1,524	1,881	3,540	3,538
Jupiter .	5,203	11,86	140,8	140,7
Saturn . . .	9,539	29,46	868,0	867,9

Setzen wir für die halbe große Achse der Erdbahn den Wert in Zentimetern ein ($1,495 \cdot 10^{13}$) und für das Erdjahr den Wert in Sekunden ($3,156 \cdot 10^{7}$), so finden wir für die Konstante C des Sonnensystems

$$C = 3,355 \cdot 10^{24}\ \mathrm{cm^3\,sec^{-2}}. \qquad 112$$

§ 87. Die Bewegungen der Satelliten.

Daß das dritte Keplersche Gesetz nicht nur für die Bewegungen der Planeten um die Sonne gilt, sondern auch für die Bewegungen, die die Trabanten oder Satelliten der einzelnen Planeten um diese ausführen, zeigt Tab. VII, die sich auf die vier größeren Jupitermonde bezieht.

Tabelle VII.

Drittes Keplersches Gesetz für die vier großen Jupitermonde. (Halbachse a in Erdbahnradien. Umlaufszeiten T in Erdjahren

	1000 a	1000 T	$T^2 . a^3$
Erster Mond . .	2,819	4,844	1047
Zweiter Mond .	4,483	9,728	1049
Dritter Mond .	7,155	19,588	1048
Vierter Mond . . .	12,585	45,692	1048

Für die Jupitermonde erweist sich also die Konstante, die man erhält, indem man die dritte Potenz der Halbachse durch das Quadrat der Umlaufszeit dividiert, 1048mal kleiner als für die die Sonne umkreisenden Planeten.

Berechnen wir schließlich noch für die Bewegung des Erdmondes um die Erde das Verhältnis T^2/a^3, so haben wir, auf Erdjahr und halbe Erdbahnachse als Einheiten bezogen, $T = 0,074801$, $a = 0,002571$ zu setzen. Daraus folgt für den Umlauf des Mondes ein 329 500 mal kleinerer Wert der Konstanten C als für die Planetenbewegung.

§ 88. Das Newtonsche Gravitationsgesetz.

Wie deutlich aus den Tab. VI und VII hervorgeht, erweist sich in der Tat die Beschleunigung, die ein Himmelskörper an einem

zweiten hervorbringt, als von des zweiten individuellen Eigenschaften völlig unabhängig. Andererseits stellt das Produkt aus der Beschleunigung und dem Quadrat der augenblicklichen Entfernung eine für den ersten Himmelskörper charakteristische Konstante dar, die wir mit F bezeichnen wollen. Im allgemeinen ist also die Kraft, die ein Himmelskörper von der individuellen Konstante F_1 auf einen zweiten von der Masse m_2 in einer Entfernung r ausübt, durch die Gleichung bestimmt

$$K = \frac{m_2 F_1}{r^2}. \tag{113}$$

Mittels dieser Gleichung ist beispielsweise die Kraft bestimmt, die die Sonne auf den Planeten Jupiter ausübt; diese Kraft ist, wenn wir für die Sonne den Index s und für den Jupiter den Index j gebrauchen gleich $m_j F_s/r^2$. Nun muß andererseits aber auch der Jupiter, wofern er allen anderen Himmelskörpern dem Entfernungsquadrate umgekehrt proportionale Beschleunigungen erteilt, auf die Sonne eine Kraft ausüben, die gleich ist $m_s F_j/r^2$. Nach dem dritten Newtonschen Bewegungsgesetz, dem Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion, muß diese Kraft ebenso groß sein wie diejenige, die die Sonne auf den Jupiter ausübt*). Das Produkt aus Kraft und Entfernungsquadrat muß also einerseits proportional sein m_j mit einem von allen Jupitereigenschaften unabhängigen Proportionalitätsfaktor; andererseits proportional m_s mit einem von allen Sonneneigenschaften unabhängigen Proportionalitätsfaktor. Beides ist zugleich der Fall, wenn das Produkt aus Kraft und Entfernungsquadrat gleich ist dem Produkt aus den Massen von Sonne und Jupiter und aus einem universellen Proportionalitätsfaktor, der sowohl von den individuellen Eigenschaften der Sonne als auch von jenen des Jupiters unabhängig ist.

Die Kraft, mit der zwei Körper von den Massen m_1 und m_2 einander wechselseitig anziehen, mit der sie gegeneinander gravitieren, ist also durch den Ausdruck dargestellt

$$K = f\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{114}$$

wobei der universelle Proportionalitätsfaktor f als die Gravitationskonstante bezeichnet wird. Die Gl. 114 ist der mathematische Ausdruck des von Newton im Jahre 1687 aufgestellten

---

*) Für die genaue Rechnung ist zu beachten, daß sich ein aus zwei Himmelskörpern bestehendes System um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegt.

Gravitationsgesetzes, nach dem die wechselseitige Gravitation eine universelle Eigenschaft aller Körper und in ihrer Stärke dem Produkt der gravitierenden Massen direkt und dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist.

§ 89. Die Identität der gravitierenden und der trägen Masse.

Aus dem Gravitationsgesetz folgt die Identität zweier für einen jeden Körper ableitbarer, charakteristischer, individueller Konstanten. Die eine ist diejenige, die wir erhalten, wenn wir eine beliebige, an dem Körper angreifende Kraft durch die Beschleunigung dividieren, die die Kraft an dem Körper bei freier Beweglichkeit hervorbringt. Die andere ist diejenige für den Körper charakteristische Konstante, die sich ergibt, wenn wir die Beschleunigung, die er infolge der von ihm ausgehenden Anziehung in einer beliebigen Entfernung hervorbringt, mit dem Quadrate dieser Entfernung multiplizieren und sodann durch die Gravitationskonstante dividieren, deren genauer Wert, wie später gezeigt werden wird, ermittelt werden kann. Die erste Konstante nennen wir die träge Masse des Körpers, die zweite seine gravitierende Masse.

Infolge der Wechselseitigkeit aller Gravitationswirkungen ist natürlich andererseits die Identität der gravitierenden und der trägen Masse nur ein anderer Ausdruck für die bei der Ableitung des Gravitationsgesetzes benutzte Tatsache, daß die Beschleunigung, die ein Korper durch einen zweiten infolge der Gravitation empfängt, von der Masse des ersten Körpers unabhängig ist. Deshalb ist, wie schon erwähnt, die Beschleunigung des freien Falles an demselben Orte für alle Körper von verschiedenster Masse und verschiedenster stofflicher Beschaffenheit dieselbe; deshalb ist auch die Schwingungsdauer eines Pendels von seiner Masse und seinem Stoffe unabhängig. Insbesondere haben die bereits erwähnten Messungen, die Bessel (1833) an Pendeln aus mannigfachem Material vorgenommen hat, den Nachweis dafur erbracht, daß ein durch die stoffliche Verschiedenheit etwa bedingter Unterschied in der Fallbeschleunigung geringer sein müsse als der 100 000. Teil des gemessenen Wertes. Einen sehr exakten Beweis für die Identität der trägen und der gravitierenden Masse bilden vor allem aber die im folgenden zu besprechenden experimentellen Bestimmungen der Gravitationskonstante sowie die später zu erörternden Versuche von Eötvös.

§ 90. Die Bestimmung der Gravitationskonstante mittels der Drehwage.

Die Bestimmung des in dem Gravitationsgesetz auftretenden universellen Proportionalitätsfaktors ist von größter Bedeutung so-

wohl für die Physik als auch für die Astronomie; denn solange diese Konstante nicht bekannt ist, können die Massen der Himmelskörper nur untereinander verglichen, nicht aber in üblichen Masseneinheiten angegeben werden.

Die einfachste Methode zur Ermittlung der **Gravitationskonstante** besteht darin, daß man mittels besonders feiner Apparate direkt die Kraft mißt, die Massen von bekanntem Wert in meßbarer Entfernung infolge ihrer Gravitation aufeinander ausüben. Die Messung geschieht am häufigsten entweder durch eine sogenannte **Drehwage** oder durch eine gewöhnliche Wage.

Die **Drehwage**, deren Konstruktion und Prinzip in einem späteren Kapitel eingehender zu erörtern sein werden, besteht im wesentlichen aus einem in horizontaler Ebene drehbaren Wagbalken,

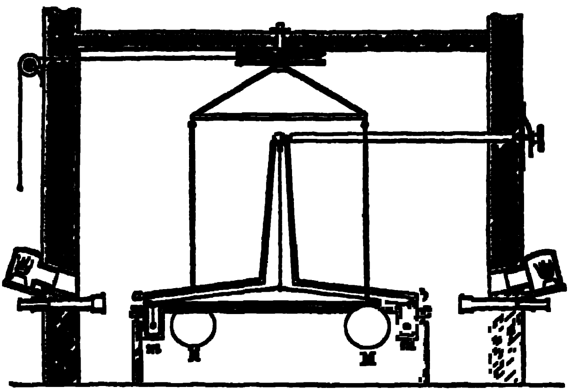


Fig. 108. Der Versuch von Cavendish.

der in der Mitte an einem feinen elastischen Drahte aufgehängt ist. Eine bestimmte Stellung des Wagbalkens stellt seine Ruhelage dar, während jede Abweichung aus ihr das Angreifen einer Kraft (genauer gesagt, eines Kräftepaars) zur Voraussetzung hat. Umgekehrt kann also eine entsprechend geaichte Drehwage zu der Messung von Kräften verwendet werden.

Der älteste erfolgreiche Versuch, die Gravitationskonstante mittels einer Drehwage zu bestimmen, stammt von **Cavendish**, dem bekannten Entdecker des Wasserstoffs (1798). Sein Versuch ist in Fig. 108 wiedergegeben.

Als Versuchsraum diente ein Zimmer, dessen Einrichtung Luftströmungen möglichst ausschloß. Der Beobachter befand sich bei diesem Versuche außerhalb des Zimmers; er beobachtete durch Fernrohre, die in den Wänden angebracht waren, während über

den Fernrohren befindliche Lampen das Zimmer beleuchteten. Die Drehwage bestand bei dem Versuch von Cavendish aus einem etwa 2 m langen Stab aus Tannenholz, der an seinen Enden zwei Kugeln aus Blei von etwa $^3/_4$ kg trug (m und n in Fig. 108). Befestigt war der Stab an einem Draht aus versilbertem Kupfer; der Draht war so dick gewählt, daß die einfache Dauer einer Torsionsschwingung etwa 7 Minuten betrug. Die Drehwage war in einem hölzernen Kasten eingeschlossen. Außerhalb dieses Kastens hingen von einer anderen horizontalen Stange zwei große Bleikugeln von ungefähr je 150 kg (M und N in Fig. 108) hinab. Diese horizontale Stange konnte von außen her gedreht werden, wodurch, wenn ursprünglich die Stange zu dem Wagbalken der Drehwage senkrecht stand, die große Kugel M der kleinen m und die große N der kleinen n genähert werden konnten. Die Einwirkung der großen Kugeln versetzt nun den Balken ab aus seiner Gleichgewichtslage in eine Drehung, solange, bis die Torsion des Fadens eine weitere Drehung verhindert. Der Balken führt derart mehrere Schwingungen aus (bei Cavendishs Anordnung von stets einigen Minuten Dauer) und gerät schließlich in eine neue Ruhelage, die ein wenig von der ursprünglichen abweicht. Aus der Abweichung kann die Größe der Kraft und somit bei der bekannten Entfernung und den bekannten Massen die Größe der Gravitationskonstante ermittelt werden.

Mit der Gravitationskonstante ist auch eine andere wichtige Konstante gegeben, deren Ermittlung das eigentliche Ziel der Messungen von Cavendish war, namlich die mittlere Dichte der Erde. Bezeichnen wir die Masse der Erde mit M und ihren Radius mit R, so kommt der Fallbeschleunigung nach dem Newtonschen Gesetz die Bedeutung zu, daß

$$g = f\frac{M}{R^2} \tag{115}$$

sein muß. Nun ist aber, wenn wir die mittlere Dichte der Erde, auf die Dichte des Wassers als Einheit bezogen, mit D bezeichnen,

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 D, \tag{116}$$

und somit ist

$$D = \frac{3}{4\pi}\frac{g}{fR}. \tag{117}$$

Die Messungen von Cavendish*) ergaben für die mittlere Erddichte einen Wert von 5,48, was einem Werte der Gravitations-

*) Cavendish, Lond. Trans. 88 (1798).

konstanten von $6{,}7 \cdot 10^{-8}$ absoluten Einheiten ($g^{-1}\,cm^3\,sec^{-2}$) entspricht.

Cavendishs Messungen wurden etwa ein halbes Jahrhundert später (1843) mit großer Genauigkeit von Baily wiederholt*). Dieser benutzte bei seinen zahlreichen Versuchen (es waren ihrer etwa 2000) Kugeln aus den verschiedensten Stoffen, sogar aus Meteorstein, und er konnte zeigen, daß der erhaltene Wert der Gravitationskonstante völlig unabhängig von dem benutzten Material ist. Seine Versuche bestätigten auch genau die Proportionalität mit dem Produkt der Massen und dem umgekehrten Entfernungsquadrat.

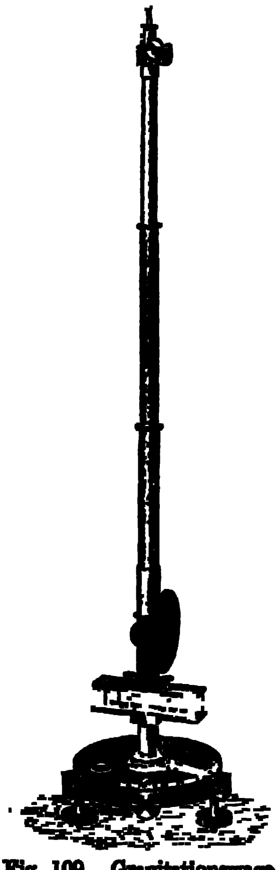


Fig. 109. Gravitationswage.

Verbessert wurde das Verfahren der Drehwage durch Reich, der die bekannte Methode der Spiegelablesung zur Anwendung brachte**); dann vor allem durch Cornu und Baille, die (1873) die Aufhängevorrichtung derart modifizierten, daß sie unter Beibehaltung der Schwingungsdauer dennoch den Apparat wesentlich verkleinern und dadurch viele störende Einflüsse ausschalten konnten***). Die Cornusche Methode wurde noch durch Boys (1894) vervollkommnet, dem es dadurch möglich wurde, die Metallfäden durch viel geeignetere Quarzfäden zu ersetzen†). Braun hat (1895) zuerst die Drehwage im Vakuum benutzt, und dadurch die störende Wirkung von Luftströmungen beseitigt††). Schließlich hat Burgess (1902) durch einen geschickten Kunstgriff die Belastung des Quarzfadens ohne Verminderung der Massen verringert, indem er die an der Drehwage befestigten schweren Körper auf Quecksilber schwimmen ließ†††).

*) Lond. Astr. Soc. Mem. 14 (1843).

**) „Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittels der Drehwage", Freiberg 1838 und „Neue Versuche mit der Drehwage". Leipzig 1852.

***) Paris, C. R. 76 (1873), S. 954—958.

†) Lond. Trans. 186 (1889), S. 1—72.

††) Wien. Akad. Denkschr. 64, 1897, S. 187—285.

†††) Phys. Review 14 (1902) S. 247.

Eine Gravitationswage, die auch zu Demonstrationszwecken verwendet werden kann, zeigen die Figg. 109 und 110. Die Drehwage ist, wie die Fig. 109 erkennen läßt, in einem Glasgehäuse eingeschlossen, das sie vor Luftströmungen und schnellen Temperaturänderungen schützt. Der Wagbalken besteht aus einem Kupferdraht, während die beiden kleinen Kugeln an seinen Enden aus Silber sind. In der Mitte ist der Wagbalken an einem kleinen Stäbchen aus Aluminium befestigt, das an seinem oberen Ende an dem aus Quarz verfertigten Aufhängefaden angekittet ist. Auf dem Glasgehäuse sitzen ein langes enges und ein kürzeres weiteres Rohr. Jenes trägt die Aufhängevorrichtung, dieses zwei zueinander senkrechte Glasfenster, durch die ein Lichtstrahl ein- und austritt, der von einem am Quarzfaden befestigten Spiegel reflektiert wird. In

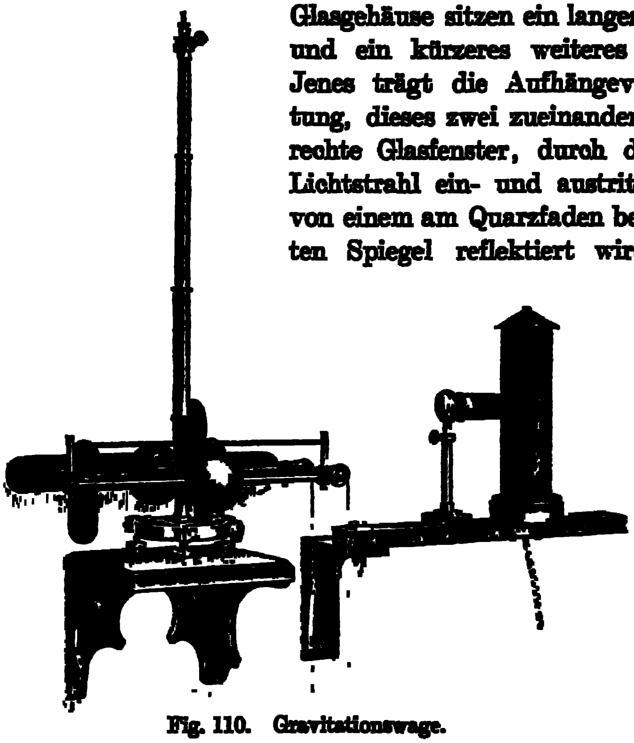


Fig. 110. Gravitationswage.

Fig. 110 sind überdies die ablenkenden Massen sichtbar, zwei Bleikugeln von 8 cm Durchmesser, die mittels Rollen und Schnüren auf zwei Führungsstangen symmetrisch zu dem Wagbalken verschoben werden können*).

*) Eine andere Verwendungsart der Drehwage besteht übrigens darin, daß die anziehenden Massen statt neben der Wage in der Verlängerung des Wagbalkens angebracht werden, wobei durch die Anziehung die Schwingungsdauer in meßbarer Weise verkleinert wird. Auf diesem Prinzip beruhen Messungen der Gravitationskonstante von Braun.

§ 91. Die Bestimmung der Gravitationskonstante mittels der gewöhnlichen Wage.

Auch mittels einer gewöhnlichen Wage kann die Gravitationskonstante experimentell bestimmt werden, am einfachsten derart, daß man die beiden Schalen mit gleichen Gewichten belastet, sodann unter eine der beiden Schalen eine anziehende Masse bringt und die Gewichtsdifferenz mißt, die infolge der von dieser Masse ausgeübten Attraktion eintritt. Zunächst wurden derartige Messungen mittels der schon in einem früheren Abschnitt (§ 85) besprochenen Jollyschen Wage durchgeführt, bei der wegen des großen Schalenabstandes von 5 oder gar 20 m der Einfluß der anziehenden Masse auf die zweite Wagschale unmerklich wird.

Jolly selbst konnte, nachdem er den durch den Höhenunterschied bedingten Gewichtsunterschied festgestellt und kompensiert hatte, nach diesem Prinzip im Jahre 1878 (und auch 1881) die Erddichte zu 5,69 ermitteln. Sein Verfahren wurde durch Poynting (1894) verbessert, der zahlreiche Mängel der Jollyschen Methode geschickt zu beseitigen wußte*). Er traf eine Anordnung, durch die vertikale Luftströmungen vermieden wurden, eine bessere Ablesung des Drehungswinkels des Wagbalkens möglich wurde und Arretierungen der Wage während einer Versuchsreihe, wie solche bei Jolly notwendig waren, überflüssig wurden.

Sehr genaue Messungen nach der Jollyschen Methode stammen schließlich von Richarz und Krigar-Menzel (1898), die ihre Versuche in den Kasematten der Festung Spandau bei Berlin anstellten und als anziehende Masse einen aus Bleistücken aufgebauten Klotz von etwa 100 000 kg benutzten; eine sinnreiche Anordnung ermöglichte es, die vierfache Anziehung dieser Masse wirksam werden zu lassen**).

§ 92. Das Wilsingsche Pendel.

Um die Störungen durch vertikale Luftströmungen zu vermeiden, benutzte Wilsing (1887) gewissermaßen einen vertikalen Wagbalken***); er verwendete zu den Ablenkungsversuchen ein sogenanntes Differentialpendel (von dem in einem späteren Kapitel eingehender die Rede sein wird), nämlich eine Stange, die an ihren beiden Enden Metallkugeln trug und die um eine horizontale Achse drehbar war, die nur ganz wenig (0,01 mm) oberhalb des Schwerpunktes lag.

---

*) J. H. Poynting, „The mean density of the earth". London 1894.

**) Berl. Akad. Abh. 1898, Anhang.

***) Potsdam, Astrophysikal. Obs. 6 (1887), Nr. 22 u. 23.

Wurden der oberen und der unteren Kugel dieses außerordentlich empfindlichen Pendels von entgegengesetzten Seiten schwere Metallmassen genähert, so wurde das Pendel ein wenig aus seiner vertikalen Richtung abgelenkt*). Aus der Größe der Ablenkung, dem Gewicht der anziehenden Massen und der Schwingungsdauer des Pendels vermochte Wilsing die Gravitationskonstante recht genau zu ermitteln.

§ 93. Die Methoden der Lotablenkung und der Pendelbeobachtungen.

Die noch kurz zu erwähnenden Methoden für die Bestimmung der Erddichte und der Gravitationskonstante stehen an Genauigkeit hinter den bereits besprochenen weit zurück. Ein besonderes Interesse verdient als überhaupt älteste Methode die der Lotablenkung durch Berge. Mittels dieser Methode hat nämlich zuerst, allerdings recht ungenau, Maskelyne im Jahre 1774 die Erddichte empirisch bestimmt.

Als ablenkende Masse werden bei der Methode der Lotabweichung Berge benutzt, die ein zu ihren Seiten aufgehängtes Lot aus der nach dem Erdmittelpunkt weisenden Vertikalrichtung natürlich ein wenig entfernen müssen. Maskelyne stellte seine Beobachtungen an dem Berge Shehallien in Schottland an. der einen fast genau west-ostlich gerichteten Grat bildet. Maskelyne stellte durch geodätische Messungen für zwei Punkte, von denen einer nördlich, der andere südlich vom Berge lag, eine Entfernung von 1330 m, zugleich aber durch Messung der Polhöhen einen geographischen Breitenunterschied von 54,6 Bogensekunden fest. Nun entspricht aber einem Abstand von 1330 m im Meridian nur ein Bogen von 43″, so daß sich die Lotabweichung als Hälfte des Unterschiedes zu 5,8″ ergab. Hieraus folgerte Maskelyne in Verbindung mit Schätzungen über das Volumen und die Dichte des Berges mittels einfacher geometrischer Überlegungen, daß die Dichte der Erde 4,7 betragen müsse**).

Bessere Ergebnisse erhielten nach demselben Prinzip später unter anderen James und Clarke an Bergen in Schottland***),

---

*) Die Ablenkungen aus der Vertikallage sind bei dem Wilsingschen Pendel viermal so groß, als wenn bloß eine Masse auf nur eine Kugel des Pendels wirken würde.

**) Lond. Trans. 1775, 1778. — Die Idee der Methode der Lotabweichung stammt übrigens bereits von Bouguer, der am Chimborasso um 1750 derartige Messungen, jedoch ohne Erfolg, anstellte.

***) Phil. Mag. (4) 12, 1856, S. 314—316; 13, 1856, S. 129—132.

Pechmann an Bergen in den Alpen*) und Preston auf den Hawai-Inseln**).

Eine andere, oft benutzte Methode besteht darin, durch vergleichende Pendelbeobachtungen die Verminderung der irdischen Schwerkraft bei dem Hinabsteigen in das Erdinnere zu messen. Diese Verminderung erscheint theoretisch deshalb begründet, weil trotz der Annäherung an den Erdmittelpunkt die Anziehung eines Teiles der Erde in Wegfall kommt. Aus der Verminderung läßt sich aber wieder die Gravitationskonstante ermitteln. Auf diese Weise bestimmte beispielsweise Airy 1856 durch Versuche in einem Schachte eines Kohlenbergwerkes die Erddichte zu 6,5***).

Eine umgekehrte Methode besteht darin, die Schwingungsdauer eines Pendels am Fuße und am Gipfel eines Berges miteinander zu vergleichen; doch gibt auch diese Methode keine genauen Werte†).

§ 94. Der Wert der Gravitationskonstante.

Als die exaktesten Bestimmungen der Gravitationskonstante sind unter den bisher angeführten wohl die folgenden††) anzusehen:

	Erddichte	Gravitationskonstante mal 10^8
Boys	5,527	6,658
Braun	5,527	6,658
Poynting	5,493	6,698
Richarz und Krigar-Menzel	5,5050	6,685

---

*) Denkschr. d. Wiener Akad. 22, 1864, S. 41—88.

**) Washington, Bull. Phil. Soc. 12, 1895, S. 369—395.

***) Lond. Trans. 1856, S. 297—352. — In großer Zahl wurden Messungen nach diesem Prinzip von Sterneck ausgeführt (Wiener Ber. 108, 2a, S. 697—766).

†) Derartige Messungen wurden ausgeführt u. a. von Carlini am Mont Cenis (Milano Effem. 1824), von Mendenhall am Fusijama in Japan (Amer. Journ. of Science 21, 1881, S. 99—103), von E. D. Preston auf den Hawai-Inseln (Washington, Bull. Phil. Soc. 12, 1895, S. 369 bis 395). — Bemerkenswert ist auch eine von A. Berget vorgeschlagene Methode, die auf einer künstlichen Änderung des Wertes der Konstanten g durch Ablassen eines Sees beruht.

††) Der etwas abweichende Wert, der sich aus Wilsings Messungen ergab (5,577 für die Erddichte und daher 6,596 für die Gravitationskonstante) wird deshalb nicht berücksichtigt, weil Wilsings Methode von keinem zweiten Beobachter verwendet wurde, es daher an einer Kontrolle fehlt, vielleicht auch nicht berücksichtigte erdmagnetische Einflüsse die Ursache der Abweichung waren.

Zumal da die Messungen von Richarz und Krigar-Menzel mit einer ganz besonderen Genauigkeit durchgeführt sind, kann wohl als der wahrscheinlichste Wert für die Gravitationskonstante

$$f = 6{,}68 \cdot 10^{-8} g^{-1} \, cm^3 \, sec^{-2} \tag{118}$$

mit einer Fehlergrenze von etwa 3 pro Mille gelten.

Zehntes Kapitel.

Die irdische Schwerkraft.

§ 95. Die Abhängigkeit der Schwere von der geographischen Breite.

Daß die Fallbeschleunigung von der geographischen Breite abhängen muß, folgt, wie schon in einem früheren Abschnitt (§ 80) ausgeführt wurde, aus zwei Tatsachen, die beide eine Folge der Erdrotation sind: einerseits aus der Existenz einer Zentrifugalbeschleunigung, die der Anziehung der Erde teilweise entgegenwirkt; andererseits aus der Abplattung der Erde, die sich ebenfalls als Folge ihrer Rotation (gemäß dem schon in Fig. 94 dargestellten Experiment) erweist.

Nun ist nach Gl. 100 die Zentrifugalbeschleunigung gleich $3{,}368 \cos\psi \cdot cm\,sec^{-2}$, wenn mit ψ die geographische Breite bezeichnet wird. Da die der Äquatorialebene parallele Richtung der Zentrifugalbeschleunigung mit der zum Erdmittelpunkt weisenden Vertikalrichtung (PO in Fig. 111) ebenfalls den Winkel ψ einschließt, so ist die der Schwerkraft entgegenwirkende Komponente der Zentrifugalkraft gleich dem Produkt aus dieser und $\cos\psi$; von der geringfügigen Richtungsverschiedenheit, die zwischen der Vertikalrichtung und der Resultierenden aus Attraktion und Zentrifugalkraft besteht, können wir dabei absehen.

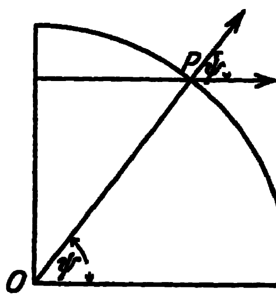


Fig. 111.

Bezeichnen wir mit g^* den Wert, den die Fallbeschleunigung am Äquator hätte, wenn die Erde nicht rotieren würde, so müßte danach, wenn die Erde eine vollkommene Kugelgestalt hätte, der beobachtbare Wert der Fallbeschleunigung durch die Beziehung gegeben sein

$$g = g^* - \cos^2\psi \cdot 3{,}368 \cdot cm\,sec^{-2}. \tag{119}$$

Bisher wurde jedoch noch nicht der Einfluß der Erdabplattung

berücksichtigt. Wie aus genauen geodätischen Messungen bekannt ist, beträgt die Abplattung ungefähr $^1/_{298}$; d. h. der Unterschied der Längen eines äquatorialen Durchmessers und der Erdachse beträgt $^1/_{298}$ des Durchmessers. In erster Annäherung kann man die Abweichungen der Erde von der Kugelgestalt beschreiben, indem man die Erde als ein derart abgeplattetes **Rotationsellipsoid** ansieht, bei dem man weder eine Abweichung des Äquators von der Kreisform noch auch irgendwelche Anomalien der Massenverteilung um die Erdachse annimmt.

Während nun ein kugelförmiger Körper nach außen immer so wirkt, als ob seine ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre, gelten viel kompliziertere Beziehungen für die von einem Rotationsellipsoid ausgeübte Anziehungskraft. Doch erweist sich diese als von dem Quadrat des Kosinus der geographischen Breite abhängig, und setzt man im besonderen die Abplattung gleich $^1/_{298}$, so führen die recht komplizierten allgemeinen Formeln zu der näherungsweise gültigen Gleichung

$$g^* = g_0^*\left(1 - \frac{1}{550}\cos^2\psi\right); \tag{120}$$

dabei ist mit g_0^* die Beschleunigung der reinen Gravitation am Äquator bezeichnet.

Kombinieren wir die letzte Gleichung mit der Gl. 119, so finden wir

$$g = g_0^*(1 - 0{,}0026\cos^2\psi). \tag{121}$$

Auf Grund der tatsächlichen Messungsergebnisse konnte hieraus **Helmert***) die empirisch sehr gut bestätigte Formel ableiten

$$g = 978{,}00(1 + 0{,}005\,310\sin^2\psi). \tag{122}$$

Die beobachtbaren Werte der Fallbeschleunigung liegen demnach zwischen 978,00 und 983,19 cm sec^{-2}. Im übrigen müssen aber die unmittelbar gemessenen Werte stets erst **auf das Meeresniveau reduziert** werden. Dies geschieht am einfachsten mittels der leicht ableitbaren Näherungsformel

$$g' = g + \frac{2H}{R}g - \frac{3}{2}\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\frac{H}{R}g. \tag{123}$$

Dabei bedeutet g' den auf das Meeresniveau reduzierten, g den beobachteten Wert der Fallbeschleunigung, H die Erhebung über das Meeresniveau, R den Erdradius, ϑ_m die mittlere Erddichte und ϑ die

*) Vgl. zahlreiche Abhandlungen in den Veröffentlichungen des preußischen geodätischen Instituts.

Dichte der Substanz, die sich über den Meeresspiegel erhebt. Nimmt man als Längeneinheit das Meter, so ergibt sich derart die Näherungsformel*)

$$g' = g + 0{,}000003078 \cdot H - 0{,}000000412 \cdot H \cdot \vartheta. \qquad (124)$$

§ 96. Die Lotrichtung.

Infolge des Hinzukommens der Zentrifugalkraft zu der reinen Gravitation und infolge der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt fällt die empirisch festgestellte Lotrichtung nicht völlig zusammen mit der durch astronomische Messungen ermittelbaren Richtung, die zu dem Erdmittelpunkt weist. Der Unterschied beider Richtungen wird als die Lotabweichung bezeichnet.

Ebenso wie der Betrag der Fallbeschleunigung variiert natürlich auch die Lotabweichung mit der geographischen Breite, und überdies unterliegt sie auch zahllosen lokalen Einflüssen infolge des Vorhandenseins von Bergen und unterirdischen Dichteanomalien.

Zur Bestimmung der Lotrichtung bedient man sich, wenn es sich nicht um besonders feine Messungen handelt, einfach eines Lotes oder einer Libelle. Für feinere Messungen wird hingegen ein Horizontalpendel verwendet. Bei genügend großer Schwingungsdauer kann nämlich die Empfindlichkeit des Pendels derart gesteigert werden, daß damit auf Grund von beobachteten Änderungen der Schwingungsdauer Verschiedenheiten in der Lotrichtung, die weniger als den tausendsten Teil einer Bogensekunde betragen, gleichwohl noch sicher festgestellt werden können.

Beobachtungen, die derart Rebeur (von etwa 1890 an) anstellte, ließen deutlich eine durch den Mond verursachte periodische Änderung der Lotrichtung erkennen**), die wesensverwandt ist mit dem bekannten, später näher zu erörternden Phänomen von Ebbe und Flut. Die Messungen der Lotrichtungsschwankungen haben übrigens auch Schlüsse über die Starrheit des Erdkörpers ermöglicht.

§ 97. Die Abhängigkeit der Schwere von der Bewegungsrichtung.

Wie schon erwähnt wurde, stellt die beobachtbare Schwerkraft die Resultierende aus der reinen Gravitation und einer durch die Erdrotation verursachten Zentrifugalkraft dar; andererseits kann aber diese Zentrifugalkraft gesteigert oder vermindert werden, je nachdem ob der betreffende Körper ostwärts oder westwärts be-

*) Vgl. hierzu J. B. Messerschmitt, Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche (Sammlung „Die Wissenschaft", Bd. 27, Braunschweig, Vieweg, 1908).

**) Vgl. Gerland, Beiträge zur Geophysik, Bd. II und III.

wegt wird. Es ergibt sich somit die bemerkenswerte Folgerung, daß eine **ostwärts** gerichtete Bewegung das **Gewicht** eines Körpers **vermindert**, daß hingegen eine westwärts erfolgende Bewegung das Körpergewicht vermehrt.

Auf diese merkwürdige Folgerung der Theorie als mögliche Quelle von Beobachtungsfehlern hat zuerst **Eötvös** aufmerksam gemacht, und auf seine Veranlassung hat im Jahre 1909 **Hecker** diesbezügliche Versuche im Schwarzen Meer ausgeführt; die Messungen der Schwere wurden gleichzeitig auf zwei Schiffen vorgenommen, die in entgegengesetzten Richtungen nach Westen und Osten fuhren. Die Messungsergebnisse von **Hecker** bestätigten in der Tat die theoretische Erkenntnis*).

§ 98. Das Schwerevariometer von Eötvös.

Als der empfindlichste Apparat zur Untersuchung der **lokalen Variationen der Schwere** muß zurzeit wohl das von **Eötvös** im Jahre 1896 erfundene **Schwerevariometer** angesehen werden; es stellt eine **Kombination eines Horizontalpendels mit einer Jollyschen Wage** dar; das eine Ende des horizontalen Balkens trägt nämlich nicht unmittelbar das zweite Gewicht, sondern dieses hängt an einem längeren Faden hinab.

Das Prinzip der **Eötvös**schen Drehwage ist aus deren in Fig. 112 wiedergegebenem Querschnitt ersichtlich. Der Draht, an dem der Balken hängt, wird bei diesem Instrument aus einer Platin-Iridium-Legierung und in der Dicke von etwa 0,04 mm gewählt. Der Balken besteht aus Aluminium; er trägt an dem einen Ende

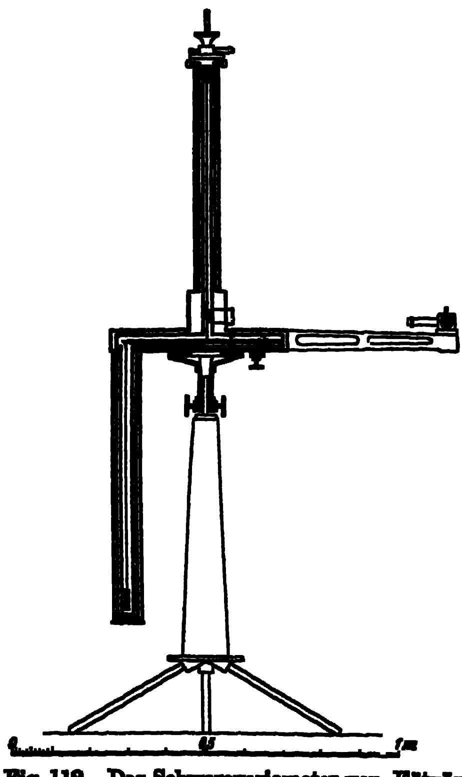


Fig. 112. Das Schwerevariometer von Eötvös.

*) s. Veröffentlichungen des Zentralbüros der internationalen Erdmessung. Neue Folge, Nr. 20, Berlin 1910.

eine Platinplatte, an dem anderen Ende hängt ein ungefähr 30 g wiegender Platinstab an einem dünnen Metallfaden hinab. Die Torsion wird in geeigneter Weise mittels eines Spiegels abgelesen. Zum Schutz gegen Luftströmungen, rasche Temperaturänderungen und elektrische Einwirkungen ist das Gehänge in ein dreifaches Messinggehäuse eingeschlossen, dessen Wände einige Millimeter dick sind.

Wie theoretische Überlegungen zeigen, ermöglicht die einfache Versuchsanordnung von Eötvös die Bestimmung des Gradienten*) der Schwerkraft in der Horizontalebene, während mittels der Jollyschen Wage nur die Änderung der Schwerkraft in vertikaler Richtung gemessen werden kann**). Mittels der Eötvösschen Drehwage kann für jede beliebige horizontale Richtung (also z. B. die Süd-Nord- oder die West-Ost-Richtung) die Zunahme des Wertes der Fallbeschleunigung pro Zentimeter ermittelt werden. Die Richtung des Gradienten ist die der stärksten Änderung. In absolutem Maß sind die Werte des Gradienten auch bei starker lokaler Änderung doch nur von der Größenordnung von 10^{-9}; die entsprechenden Änderungen der Lotrichtung betragen höchstens einige Bogensekunden. Im übrigen läßt sich mittels des Schwerevariometers eine derartige Messungsgenauigkeit erzielen, daß bei geeigneter Versuchsanordnung damit beispielsweise die Masse eines $1^1/_2$ m vom Apparate entfernten Menschen infolge der von ihm ausgeübten Anziehung mit einer Genauigkeit bis zu etwa 1 % gemessen werden kann***).

---

*) Wegen des Begriffs des Gradienten vgl. § 33.

**) Verschiedenheit in horizontaler Richtung kann allerdings auch mittels eines Pendels gemessen werden, aber nur bei größerem Abstand der beiden Versuchsorte.

***) Außer dem Gradienten in der Horizontalebene und der Änderung der Schwerkraft in vertikaler Richtung können mittels des Eötvösschen Variometers übrigens noch zwei in geodätischer Hinsicht sehr wichtige Größen bestimmt werden. Wird das Potential der Schwerkraft mit V bezeichnet, und liegen die x- und y-Achse eines Koordinaten-Achsenkreuzes in einer horizontalen Ebene, so sind die beiden Größen durch die beiden Ausdrücke gegeben: $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$. Diese beiden Werte ergeben sich übrigens auch dann, wenn die beiden Massen des Apparates in gleicher Höhe angebracht sind, es sich also nur um eine verfeinerte Drehwage handelt. Die beiden angegebenen, in geodätischer Hinsicht wichtigen Ausdrücke bestimmen die Abweichung der Krümmung der Niveaufläche von der Kugelfläche und die Richtung der sogenannten Hauptkrümmung dieser Niveaufläche.

§ 99. Die unterirdischen Störungen.

Ist innerhalb eines Gebietes für eine genügend große Zahl von Plätzen Betrag und Richtung des Schweregradienten ermittelt, so läßt sich auf einer Karte des betreffenden Gebietes ein Netz von Kurven gleicher Schwere konstruieren. Eine Kontrolle ist dabei auch durch direkte Pendelbeobachtungen möglich, die natürlich für zwei verschiedene Orte dieselbe Schweredifferenz ergeben müssen wie die Berechnung aus den gemessenen Werten des Schweregradienten.

In die Karten, die die Schwerevariationen darstellen sollen, werden allerdings nicht die unmittelbar beobachteten Gravitationsvariationen eingetragen, sondern es werden von diesen zunächst einmal die Terraineinflüsse (im engeren Sinn) in Abzug gebracht, die von den in der Nähe des Beobachtungsortes etwa befindlichen Gräben oder Dämmen usw. herrühren. Nachdem aus den Messungen diese Terrainstörungen ausgeschaltet sind, erübrigen die sogenannten topographischen Werte; von ihnen werden weiterhin die sogenannten kartographischen Einflüsse abgezogen, die von den sichtbaren oberirdischen Störungsquellen, vor allem also von Bergen, herrühren, und die auf Grund der Landkarten berechnet werden können. Werden auch diese Einflüsse aus den Messungsergebnissen ausgeschaltet, so bleiben endlich die sogenannten unterirdischen oder subterranen Störungswerte übrig. Dementsprechend lassen sich die Gradienten der durch unterirdische Störungen hervorgerufenen Schwerevariationen konstruieren und andererseits die sogenannten Isogammen, die diejenigen Punkte miteinander verbinden, zwischen denen keine durch subterrane Einflüsse verursachten Schweredifferenzen bestehen; die Isogammen sind also die Kurven gleicher Schwerkraft, wenn von allen Terrain- und kartographischen Störungen abstrahiert wird.

Die Isogammenkarten sind von besonderem geologischem und seismologischem Interesse und können wohl auch von praktischer Bedeutung bei Probebohrungen (nach Salz, Petroleum, Erzen usw.) sein. In Fig. 113 ist als ein Beispiel eine von Mitarbeitern von Eötvös (vor allem Pekár) aufgenommene Isogammenkarte der Umgebung von Kecskemét in Ungarn wiedergegeben*). Die eingezeichneten kurzen Pfeile stellen durch ihre Länge und Richtung die Gradienten der subterranen Störungen nach Betrag, Richtung und Richtungs-

*) Vgl. D. Pekár, Die geophysikalischen Messungen des Barons Roland v. Eötvös in „Naturwissenschaften“ 7, 1919, S. 149—159.

sinn dar. Die Isogammen entsprechen im absoluten (g-cm-sec-) System den Werten zwischen 0,022 und 0,040. Die größten unterirdischen Massen liegen offenbar, wie die Karte erkennen läßt, im Umkreis des Gebietes der 40-Isogamme. Aus der Karte läßt sich der vom geologischen wie seismologischem Standpunkt aus höchst interessante Schluß ziehen, daß sich in der Gegend von Kecskemét unterirdisch ein Ringgebirge (nach Analogie der Mondkrater) befinden muß, womit auch die in dieser Gegend wahrnehmbaren Erdbeben zusammenhängen dürften.

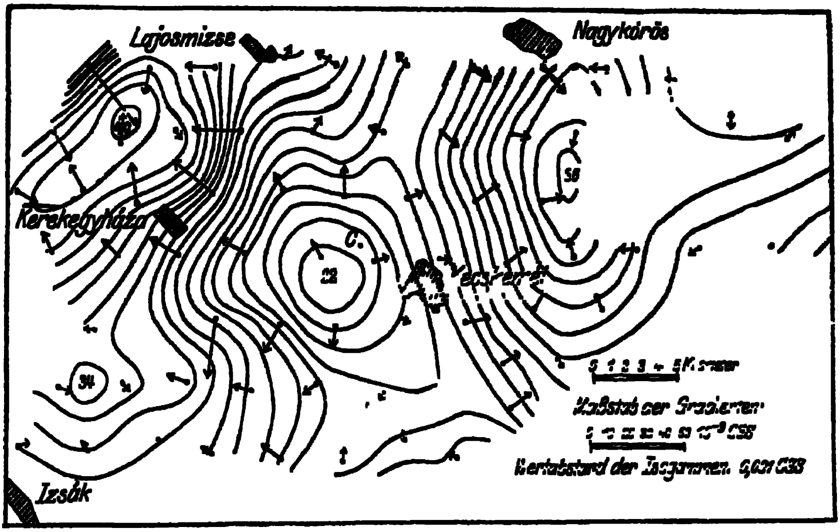


Fig. 113. Beispiel einer Isogammen-Karte.

§ 100. Die rotierende Wage.

Um die bereits besprochene Abhängigkeit der Schwere von der Bewegungsrichtung exakt nachzuweisen, bediente sich Eötvös einer sehr empfindlichen rotierenden Wage, wie sie durch Fig. 114 dargestellt ist. An ihren beiden Armen sind statt der Schalen größere Gewichte befestigt. Die Wage steht auf einer drehbaren Unterlage, die durch ein Uhrwerk in gleichmäßige Rotation versetzt wird. Ist dies der Fall, so muß der sich westwärts bewegende Arm schwerer, der sich ostwärts bewegende hingegen leichter werden. Die Folge hiervon ist, daß die Wage in langsame Schwingungen gerät, die Eötvös durch Resonanz derart zu verstärken wußte, daß sie mit Hilfe eines kleinen Spiegels gemessen werden konnten. Durch geschickte Kompensation mit dem Erdmagnetismus konnte Eötvös die Meßgenauigkeit noch außerordentlich steigern, so daß er aus

dem Versuche sogar die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde berechnen konnte*). So stellt der von Eötvös an der rotierenden Wage angestellte Versuch einen von dem Foucaultschen Pendelversuch unabhängigen experimentellen Beweis für die Achsendrehung der Erde dar.

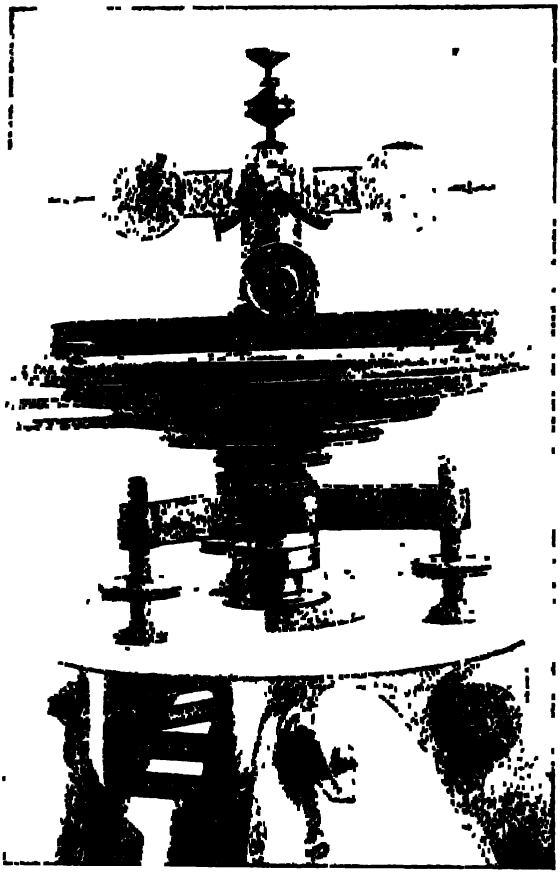


Fig. 114. Die rotierende Wage.

§ 101. Die Proportionalitätsversuche von Eötvös.

Die Methoden, deren sich Eötvös bei seinen Schweremessungen bediente, ermöglichten ihm auch einen außerordentlich genauen experimentellen Nachweis der schon besprochenen Proportionalität oder, wie man bei geeignetem Maßsystem auch sagen

*) Vgl. hierzu D. Pekár, Baron Roland v. Eötvös' wissenschaftliche Laufbahn in „Naturwissenschaften" 7, 1919, S. 387—391.

kann, der Identität zwischen gravitierender und träger Masse.

Die tatsächlich meßbare Schwerkraft ist ja, wie schon wiederholt erwähnt wurde, die Resultierende aus der reinen Gravitation, die der gravitierenden, und aus der Fliehkraft, die der trägen Masse proportional ist. Wenn nun andererseits nicht genaue universelle Proportionalität zwischen gravitierender und träger Masse bestünde, so müßte für verschieden beschaffene Körper die Schwerkraft auch an derselben Stelle eine verschiedene Richtung haben. Eötvös befestigte darum an den Enden des horizontalen Balkens einer Drehwage zwei Körper aus verschiedenem Stoffe, beispielsweise an dem einen Ende eine Messingkugel und an dem anderen Ende eine Kugel aus Glas oder Kork, und so fort. Er stellte sodann den Balken normal zum Meridian ein. Wenn die Richtung der Schwerkraft für die beiden Kugeln irgendwie verschieden gewesen wäre, hätte daraus jedenfalls ein Drehmoment resultieren müssen, das eine Torsion des Aufhängedrahtes zur Folge gehabt hätte. Bei einer Drehung des Apparates um 180° hätte diese Torsion jedenfalls erkennbar werden müssen.

Bei Versuchen, die Eötvös im Jahre 1890 anstellte, war die Versuchsanordnung bereits derart vollkommen, daß eine Verschiedenheit der trägen Massen um nur $^1/_{20\,000\,000}$ bei gleicher schwerer Masse eine erkennbare Abweichung von einer Bogenminute in der Einstellung des Balkens zur Folge gehabt hätte. Gleichwohl war keine Abweichung festzustellen. Später hat Eötvös seine Methode derart verbessert, daß auch noch eine zehnmal kleinere Massenverschiedenheit hätte offenbar werden müssen. Durch die Versuche von Eötvös erscheint somit der Satz von der Identität der trägen und der gravitierenden Masse bis auf den hundertmillionsten Teil experimentell bewiesen.

Elftes Kapitel.

Die Bewegung von Massensystemen.

§ 102. Die Erhaltung des Schwerpunktes und der gesamten Bewegungsgröße.

Wie schon bei der Besprechung der allgemeinen dynamischen Prinzipe (in § 38) dargelegt wurde, gilt für jedes System von Körpern, das nur der Einwirkung innerer Kräfte unterliegt, der Satz von der Erhaltung der vektoriellen Summe der gesamten Bewegungsgröße, und aus diesem Satze folgt wiederum, daß der

Schwerpunkt des Systems durch die alleinige Einwirkung innerer Kräfte keine Lagenänderung erfahren kann.

Das einfachste Beispiel für die Geltung dieses Satzes stellt ein System von zwei Korpern dar, deren Bewegungen in derselben Geraden erfolgen. Erteilt der eine Körper, dessen Masse m_1 sei, dem anderen Körper von der Masse m_2 die Geschwindigkeit v_2, so muß er selbst in entgegengesetzter Richtung eine Geschwindigkeit v_1 annehmen, die durch die Gleichung bestimmt ist

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0. \tag{125}$$

Durch diese Beziehung erklärt sich die bekannte Erscheinung des Rückstoßes, die an abgefeuerten Geschützen beobachtet wird. Bezeichnen wir mit E die bei der Abfeuerung gewonnene Energie, so ist

$$E = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2. \tag{126}$$

Die Verbindung dieser Gleichung mit der vorhergegangenen ergibt für die Geschwindigkeit v_1 des Rückstoßes und die Geschoßgeschwindigkeit v_2 die Formeln

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Em_2}{m_1 m_2 + m_1^2}}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2Em_1}{m_1 m_2 + m_2^2}}. \tag{127}$$

Die Erscheinung des Rückstoßes kann leicht mittels einer Spielkanone demonstriert werden, die auf Rädern läuft.

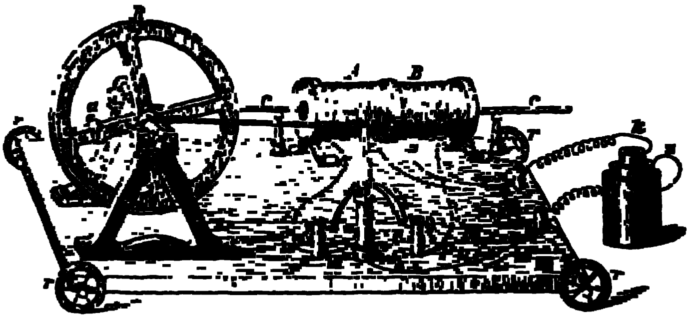


Fig. 115. Die Erhaltung des Schwerpunkts.

Sehr schön läßt sich nach Mach*) der Satz von der Erhaltung des Schwerpunkts experimentell mittels eines Elektromotors veranschaulichen, der auf einem auf Rädern beweglichen Gestell angebracht ist (Fig. 115). Wenn in der Spule AB der Eisenkern C nach rechts rückt, so bewegt sich das Gestell nach links und umgekehrt.

*) Die Mechanik in ihrer Entwicklung.

Ist der Motor in Gang, so führt daher das Gestell oszillierende Bewegungen aus. Durch geeignete Bewegungen entsprechend angebrachter und mit dem Motor verbundener Massen lassen sich indessen diese Oszillationen ausgleichen. Die ausgleichenden Bewegungen müssen hierzu nur so beschaffen sein, daß die durch sie bedingten Änderungen der Bewegungsgröße stets entgegengesetzt gleich sind den Impulsänderungen, die durch die Bewegung des Eisenkerns hervorgerufen werden. Bei dem in Fig. 115 dargestellten Versuch läßt sich beispielsweise ein derartiger Ausgleich durch ein an dem Schwungrad (R) angebrachtes Laufgewicht (a) erreichen.

Durch den Schwerpunktsatz erklärt sich auch die bekannte Erscheinung, daß ein auf einer Wage stehender Mensch die Angabe seines Gewichtes vergrößern oder verkleinern kann, je nachdem, ob er sich während der Wägung in die Höhe reckt oder aber sich niederduckt. Der Sinn des Satzes von der Erhaltung des Schwerpunkts läßt sich nach Mach auch durch die folgenden Beispiele veranschaulichen, die allerdings nur Gedankenexperimenten entsprechen. Denken wir uns frei im Weltenraum ein Tier, so kann dieses nicht von seiner Stelle rücken; denn wenn es einen Teil seines Körpers etwa nach rechts streckt, so muß nach dem Schwerpunktsatz der Rest seines Körpers sofort nach links rücken. Zieht es den nach rechts gestreckten Teil wieder zurück, so erfolgt sofort auch eine entgegengesetzte Bewegung nach rechts bei dem Rest des Körpers. — Denken wir uns (um ein anderes Beispiel anzuführen) auf einem Geleise einen mit äußerst geringer Reibung beweglichen und mit Steinen gefüllten Waggon, so müßte, nach dem Schwerpunktsatz, ein auf dem Waggon stehender Mann den Waggon dadurch in Bewegung setzen können, daß er in entgegengesetzter Richtung Steine fortschleudert. — Wenn eine Bombe platzt, so müßten sich, wenn vom Luftwiderstand und von Bewegungshindernissen abgesehen wird, die Splitter jedenfalls so bewegen, daß ihr Schwerpunkt eine parabolische Bahn beschreibt.

§ 103. Die Erhaltung der Flächenmomente.

Wie nach dem Schwerpunktsatz in einem Zweikörpersystem jede Bewegung des einen Körpers eine entgegengesetzte des anderen zur Folge hat, so muß in einem solchen System nach dem Satz von der Erhaltung der Flächenmomente sofort auch eine entgegengesetzte Drehung bei dem einen Körper eintreten, wenn der andere in Drehung versetzt wird.

Dies läßt sich sehr schön nach Mach mittels des schon erwähnten Elektromotors demonstrieren. Man befestigt hierzu den Motor

frei drehbar an einer vertikalen Achse, so daß das Schwungrad horizontal ist (Fig. 116). Durch eine geeignete Anordnung ist dafür gesorgt, daß die den Strom zuführenden Drähte die Rotationen

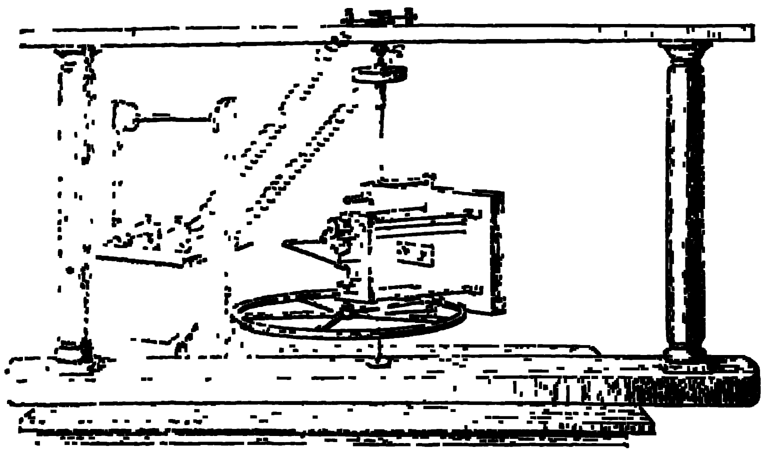


Fig. 116. Die Erhaltung der Flächenmomente.

nicht behindern konnen. Bindet man nun etwa den Motorkörper mittels eines Fadens an dem Stativ fest, so nimmt man wahr, daß der Faden sofort gespannt wird, wenn das Schwungrad zu rotieren beginnt. Wird der Faden durchgebrannt, so setzt eine Rotation des Gestelles ein, die derjenigen des Schwungrads entgegengesetzt ist.

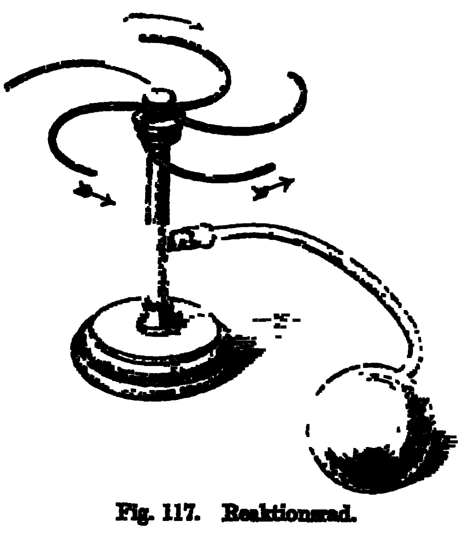


Fig. 117. Reaktionsrad.

Ein sehr bekanntes Beispiel für die Geltung des Flächensatzes stellen die Reaktionsräder dar. Ein solches ist in Fig. 117 dargestellt. Drückt man den Ballon zusammen, so strömt Luft im Sinne der kürzeren Pfeile aus, wodurch das ganze Rädchen im entgegengesetzten Sinne, nämlich im Sinne des langen Pfeils, in Umdrehung gerät.

Recht instruktiv sind für das Verständnis des Flächensatzes einige Beispiele, die in der Form von Gedankenexperimenten Föppl

angibt*). Wenn sich beispielsweise auf der Erde nur solche Eisenbahnzüge und Schiffe auf der Fahrt befänden, die sich parallel zu dem Äquator in der Richtung von West nach Ost bewegen, so müßte dadurch die ebenfalls von West nach Ost erfolgende Rotation der Erde verlangsamt, der Tag also verlängert werden. In dem Augenblick, in dem alle diese Eisenbahnzüge und Schiffe plötzlich halten würden, würde der Tag seine frühere, normale Dauer wiedererlangen. Würden aber die Züge und Schiffe nun durchwegs umkehren, sich also insgesamt nunmehr von Osten nach Westen bewegen, so würde der Tag verkurzt werden. — Die Insassen eines Luftschiffs könnten dieses dadurch in eine andere Richtung drehen, daß sie selbst in entgegengesetztem Sinn in der Gondel herumlaufen oder paarweise tanzen, oder auch nur (um ein allerdings vom praktischen, nicht aber vom theoretischen Standpunkte aus übertriebenes Beispiel zu geben) Ringe um vertikal gehaltene Finger in einem Sinn drehen, der dem der gewünschten Drehung entgegengesetzt ist. Selbstverständlich würde diese Drehung auch erreicht werden, wenn um eine vertikale Achse ein Rad in entgegengesetztem Sinne gedreht würde.

Eine alltägliche Anwendung des Flächensatzes stellt es dar, wenn ein Kind, das sich in einer Schaukel befindet, diese dadurch in Schwingungen versetzt, daß es sich an den Aufhängestricken festhält, die Beine in horizontaler Richtung ausstreckt und den Oberkörper nach hinten neigt, und dadurch sich selbst drehende Bewegungen erteilt, die als Reaktion eine entgegengesetzte Bewegung der Schaukel hervorrufen.

Während sich also ein Massensystem ohne Einwirkung äußerer Kräfte nicht in Bewegung setzen kann (weil es die Lage seines Schwerpunktes nicht zu verändern vermag), kann es sich andererseits doch von selbst, nur vermittels innerer Kräfte, umdrehen. Dieser wesentliche Unterschied, der bei der Anwendung des Schwerpunkt- und des Flächensatzes wohl beachtet werden muß, ist bis gegen das Ende des 19. Jahrhunderts fast immer übersehen worden, und durch diesen Irrtum erklärt sich auch das große Interesse, das man lange Zeit hindurch einem Problem zuwandte, das eigentlich kein besonders schwieriges war. Es war dies das Problem der fallenden Katze.

Es ist eine allgemein bekannte und auch in Sprichwörtern ausgedrückte Erfahrungstatsache, daß eine Katze, wie immer man sie auch wirft, dennoch immer auf die Füße fällt. Infolge des vor-

*) Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. IV.

hin erwähnten Irrtums hatte man ursprunglich geglaubt, daß die während des Falles eintretende Drehung eine Folge eines Abstoßes sein müsse. Zur experimentellen Entscheidung dieses Problems wurden auf Veranlassung der Pariser Akademie im Jahre 1894 ausgedehnte Versuche vorgenommen. Bei diesen (etwas grausamen) Tierversuchen wurden Katzen mit den Beinen nach oben an Schnüren aufgehängt. Die Schnüre wurden sehr vorsichtig durchgeschnitten, so daß jede Möglichkeit eines Abstoßes fehlte. Die Katzen fielen in einen finsteren Raum, so daß sie bei Beginn des Falles die Fallhohe nicht kannten. Trotzdem kamen die Katzen stets mit den Füßen am Boden an. Durch diese Versuche (bei denen übrigens auch die während des Falles vorgenommenen Körperbewegungen durch Momentphotographien ermittelt wurden) wurde so einwandfrei experimentell erwiesen, daß in der Tat innere Kräfte eine Drehung eines Massensystems herbeiführen konnen.

§ 104. Das Zweikörperproblem.

Wenn die inneren Kräfte eines Massensystems **Gravitationskräfte** sind, so gilt für ein solches System außer den Sätzen von der Erhaltung des Schwerpunkts und der Flächenmomente (nach § 38) auch der Satz von der **Erhaltung der Energie**, weil ja die Gravitationskräfte nicht nur Zentralkräfte sind, sondern auch in ihrem Betrag nur von der Entfernung abhängen.

Das einfachste Beispiel eines derartigen Systems stellt eines dar, das aus nur **zwei Körpern** besteht. Für die **innere potentielle Energie** dieses Systems ergibt sich die Beziehung

$$V = -f\frac{m_1 m_2}{r}, \tag{128}$$

wenn m die Masse, r die wechselseitige Entfernung und f die Gravitationskonstante ist. Der potentiellen Energie muß dabei ein **negatives Vorzeichen** gegeben werden, weil ja eine Verminderung der Entfernung lebendige Kraft schafft, also die potentielle Energie vermindert. Da die potentielle Energie aber der Entfernung umgekehrt proportional ist, kann sie nur dann mit abnehmender Entfernung kleiner werden, wenn sie ein negatives Vorzeichen hat. Im übrigen kann man sich in Gl. 128 noch eine von r unabhängige, unbestimmte, positive Konstante hinzugefügt denken, so daß gleichwohl die potentielle Energie als solche positiv wird. Diese Konstante stellt die potentielle Energie dar, die dem System zukommt, wenn die beiden Körper unendlich weit voneinander entfernt sind. Der in Gl. 128 für V angegebene Wert ist aber nichts anderes als die **Arbeit**,

die aufgewendet werden muß, um die Entfernung der beiden einander anziehenden Körper von der gegebenen Distanz r bis zu unendlichem Abstand zu vergrößern.

Unterliegt das System keinen in Betracht kommenden äußeren Kräften, so folgt aus dem Satz von der Erhaltung der Energie die Konstanz der Summe aus potentieller und kinetischer Energie. Haben also in einem bestimmten Augenblick die beiden Korper die Entfernung r^* und die Geschwindigkeiten v_1^* und v_2^*, so gilt für jeden beliebigen Augenblick die Beziehung

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - f\frac{m_1 m_2}{r} = \frac{m_1 v_1^{*2}}{2} + \frac{m_2 v_2^{*2}}{2} - f\frac{m_1 m_2}{r^*}. \qquad 129)$$

In Verbindung mit den Gleichungen, die durch den Schwerpunkt- und den Flächensatz geliefert werden, genügt diese Gleichung, um die Bewegung der beiden Körper zu bestimmen, sobald für irgendeinen Augenblick die Lagen der beiden Korper und deren Geschwindigkeiten gegeben sind. Das sogenannte Zweikörperproblem ist derart stets mittels allgemeiner Methoden losbar.

Besonders einfach wird das Zweikörperproblem, wenn die Masse des einen Körpers derart uber die Masse des anderen überwiegt, daß man für die Zwecke der Bahnberechnung den Schwerpunkt des aus den beiden Korpern gebildeten Systems mit dem größeren Körper zusammenfallen lassen kann. Das Zweikorperproblem reduziert sich dann auf das „Einkorperproblem", nämlich auf die Frage, wie sich ein Massenpunkt bewegt, der gegen einen festen Punkt mit einer Kraft angezogen wird, die der Entfernung von diesem festen Punkt im umgekehrt quadratischen Verhältnis proportional ist. Daß eine solche Bewegung in elliptischer Bahn erfolgen kann, ist bereits bei der Besprechung der Keplerschen Gesetze dargelegt worden. Theoretische Betrachtungen zeigen aber, daß auch noch andere Bahnformen als elliptische möglich sind. Ganz allgemein ist nämlich die Bahn, die ein Körper unter dem Einflusse einer derartigen Kraft beschreibt, ein Kegelschnitt; dieser kann aber im allgemeinen ebensowohl wie eine Ellipse auch eine Hyperbel oder als Grenzfall zwischen Ellipse und Hyperbel eine Parabel sein. Als Sonderfall der Ellipse ist wiederum der Kreis anzusehen.

Was für eine Bahn ein Massenpunkt einschlägt, wenn er sich (von weit kommend) dem Attraktionszentrum bis auf eine gewisse Distanz genähert hat, hängt von der Beziehung ab, in der in dem betreffenden Augenblick die lebendige Kraft zu der potentiellen Energie steht. Ist m die Masse des bewegten Körpers und v

seine Geschwindigkeit in dem Augenblick, in dem er sich dem Attraktionszentrum von der Masse M bis auf die Distanz r genähert hat, so wird die Bahn eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem ob $\frac{1}{2} m v^2$ kleiner, gleich oder größer ist als fMm/r. Im letzten Fall (dem der hyperbolischen Bahn) übertrifft die lebendige Kraft die Arbeit, die erforderlich ist, um den Massenpunkt gegen die Anziehung bis in das Unendliche zu entfernen; im zweiten Fall (dem der parabolischen Bahn) ist die lebendige Kraft dieser Arbeit eben gleich, während sie im ersten Fall (dem der elliptischen Bewegung) für die Verrichtung dieser Arbeit unzureichend ist.

§ 105. Das Dreikörperproblem.

Nur das Zweikörperproblem ist in seiner Allgemeinheit lösbar. Hingegen entsteht der Mechanik ein ungeheuer schwieriges und in seiner Allgemeinheit überhaupt nicht gelöstes Problem in dem sogenannten Dreikörperproblem, nämlich in der Frage, wie sich drei Massenpunkte unter dem Einfluß ihrer wechselseitigen Anziehung bewegen.

Damit dieses Problem allgemein lösbar wäre, müßten aus den Differentialgleichungen, die die Bewegung des Systems beschreiben, 6×3 oder 18 Integrale mittels allgemeiner Methoden gewinnbar sein; tatsächlich liefert aber der Schwerpunktsatz nur sechs Integrale, der Flächensatz drei und der Energiesatz eines; insgesamt ergeben demnach alle drei Sätze zusammen nur zehn Integrale, also um acht zu wenig. Es sind also nur angenäherte Lösungen möglich, die sich stets nur auf spezielle Probleme beziehen.

Ein derartiger, einfacherer, aber gleichwohl noch immer vom mathematischen Standpunkt aus ungeheuer schwieriger Spezialfall liegt bei dem sogenannten Störungsproblem vor, nämlich dann, wenn der Einfluß eines Körpers B auf einen Körper A weit über den Einfluß eines dritten Körpers C überwiegt, so daß dann nur die Störungen zu ermitteln sind, die die Bewegung des Körpers A um den Körper B durch den Körper C erfährt. Von Beispielen für das Dreikörper- und das Störungsproblem wird in dem nächsten Kapitel noch eingehender die Rede sein.

Die potentielle Energie eines Dreikörper- und ganz allgemein eines Vielkörpersystems ergibt sich durch eine entsprechende Verallgemeinerung der früheren Gl. 128. Besteht das System aus n Massenpunkten, so gilt für seine innere potentielle Energie die Formel

$$V = -\frac{f}{2} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{k=1}^{k=n}{}' \frac{m_h m_k}{r_{hk}}; \qquad (130)$$

dabei ist jedoch die zweite Summierung (wie durch den Strich neben dem Summenzeichen angedeutet ist) mit Ausschluß des Wertes $k = h$ vorzunehmen.

§ 106. Der elastische Stoß.

Wenn zwei Körper zusammenstoßen, so werden durch den Stoß ihre Geschwindigkeiten im allgemeinen nach Betrag und Richtung geändert. Die Berechnung der Geschwindigkeiten nach dem Stoß ist im allgemeinen sehr schwierig, zumal nur bei dem Zutreffen spezieller Eigentümlichkeiten die zusammenstoßenden Korper wie Massenpunkte behandelt werden können. Dies ist dann möglich, wenn sich die Mittelpunkte zweier zusammenstoßender Kugeln vor dem Stoße in derselben Geraden bewegen; der Stoß wird dann zentral und geradlinig genannt.

Ein wichtiger Sonderfall eines derartigen Stoßes liegt nun vor, wenn durch den Stoß kein sichtbarer Verlust an Bewegungsenergie entsteht, was dann zutrifft, wenn die zusammenstoßenden Körper vollkommen elastisch sind. Für einen solchen elastischen Stoß gilt demnach sowohl der Satz von der Erhaltung der gesamten Bewegungsgröße als auch der von der Erhaltung der Energie. Sind die Massen der beiden Korper m_1 und m_2 und sind ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoße v_1 und v_2, nach dem Stoße hingegen v_1' und v_2' (wobei die Geschwindigkeit in einer Richtung positiv und in der entgegengesetzten negativ gerechnet werde), so müssen also bei dem elastischen Stoß die beiden Gleichungen erfüllt sein

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{131}$$

und

$$m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 . \tag{132}$$

Indem wir diese Gleichungen nach v_1' und v_2' als Unbekannten auflösen, finden wir fur die Geschwindigkeiten nach dem elastischen Stoße

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{133}$$

und

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} . \tag{134}$$

Wenn im besonderen die beiden Massen gleich sind, so wird

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1 ; \tag{135}$$

d. h. die beiden Körper vertauschen dann durch den elastischen Stoß ihre Geschwindigkeiten.

Von besonderem Interesse ist auch der Fall, daß der zweite Körper ruht und seine Masse derart über die des ersten Körpers überwiegt,

daß diese daneben vernachlässigt werden kann. Dieser Fall liegt bei dem Stoße einer Kugel gegen eine feste elastische Wand vor. Aus den Gl. 133 und 134 folgt dann

$$v_1' = -v_1,\ v_2' = 0. \tag{136}$$

Von einer festen elastischen Wand wird also die elastische Kugel ohne Änderung des Geschwindigkeitsbetrages zurückgeworfen.

Wenn die Kugel schief auf die ebene Wand auftrifft, so müssen wir uns den Vektor ihrer Geschwindigkeit in zwei Komponenten zerlegt denken, in eine Komponente parallel zur Wandebene und in eine dazu senkrechte Komponente. Die erste Komponente wird durch den Stoß nicht geändert, die zweite wird umgekehrt. Infolgedessen wird die Kugel derart zurückgeworfen, daß ihre Bewegungsrichtung vor und nach dem Stoß gleiche Winkel mit der Wandebene einschließt (Fig. 118).

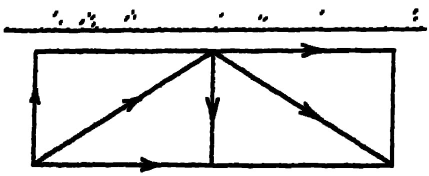


Fig. 118.

§ 107. Der unelastische Stoß.

Das Gegenstück zu dem vollkommen elastischen Stoß stellt derjenige Spezialfall dar, bei dem sich zwei vollkommen weiche, vollkommen unelastische Körper nach dem Stoß mit derselben Geschwindigkeit bewegen. Nennen wir diese gemeinsame Geschwindigkeit u, so ist nach dem Satze von der Erhaltung der gesamten Bewegungsgröße

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{137}$$

Bei dem unelastischen Stoß tritt ein Verlust an lebendiger Kraft ein (der in Wärme umgewandelt wird); er ist durch die Gleichung bestimmt

$$W = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) u^2. \tag{138}$$

Aus den Gl. 137 und 138 folgt somit

$$W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \tag{139}$$

Der Verlust an lebendiger Kraft hängt also nur von der Relativgeschwindigkeit ab, die die zusammenstoßenden Körper gegeneinander aufweisen. Es ist dies im übrigen eine notwendige Folge

der Tatsache, daß dieser Verlust von dem Bezugssystem unabhängig sein muß*).

Die Gesetze des elastischen und des unelastischen Stoßes sind für den speziellen Fall, daß die Körper wie Massenpunkte behandelt werden dürfen, in exakter Weise zuerst von Huygens (1669), teilweise bereits ein Jahr vorher von Wallis und Wren abgeleitet worden**).

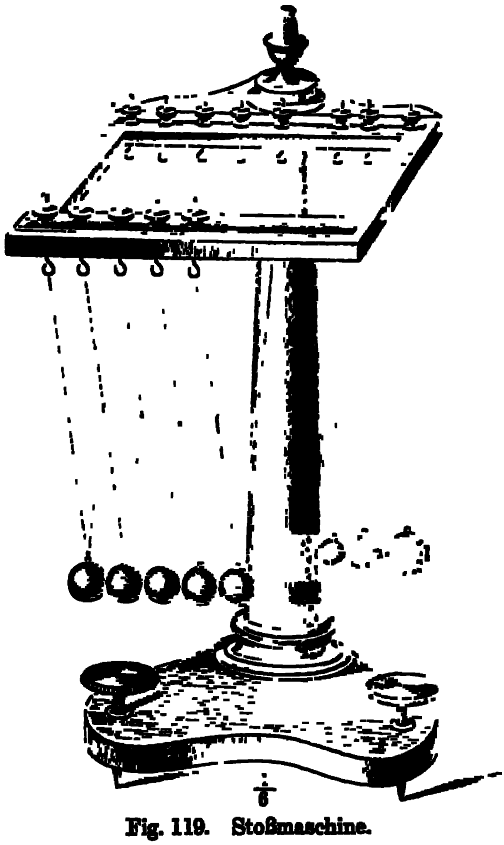


Fig. 119. Stoßmaschine.

§ 108. Die Stoßmaschine.

Zum experimentellen Nachweis der für den Stoß geltenden Gesetzmäßigkeiten bedient man sich der von Mariotte (1677) ersonnenen Stoß- oder Perkussionsmaschine. Sie besteht aus mehreren Kugeln, die derart an einem Gestell aufgehängt sind, daß sie einander gegenseitig berühren (Fig. 119). Die Kugeln wählt man gleich groß, bedient sich aber daneben auch bei manchen Versuchen noch einer kleineren oder größeren. Zur Untersuchung des elastischen Stoßes verwendet man am besten Kugeln aus Elfenbein.

---

*) Aus der Gl. 139 erhält man mittels einer einfachen Umformung den sogenannten Satz von Carnot, wonach der in Wirklichkeit bei dem unelastischen Stoß eintretende Verlust an lebendiger Kraft ebenso groß ist wie die Summe der lebendigen Kräfte, die den beiden Bewegungen vor dem Stoße relativ zu der nach dem Stoß erfolgenden Bewegung zukommen.

**) Einen Vorläufer hatten Huygens, Wallis und Wren übrigens bereits in Marcus Marci, dessen 1639 veröffentlichte Schrift „De proportione motus“ jedoch ziemlich unbeachtet blieb.

Hebt man nun eine am Ende der Reihe befindliche Kugel bis zu einer bestimmten Höhe, und läßt man sie dann (durch einen Kreisbogen) hinabfallen, so erteilt sie der nächsten Kugel einen Stoß in horizontaler Richtung. Da die Kugeln gleich groß sind, so müssen sie ihre Geschwindigkeiten tauschen, so daß also die erste Kugel zur Ruhe kommt. Derselbe Tausch erfolgt nun aber auch zwischen der zweiten und dritten Kugel. Die Folge davon ist, daß sich der Stoß durch die Reihe **fortpflanzt** und, wie der Versuch zeigt, sich die letzte Kugel bis zu dem Horizontalniveau erhebt, von dem man die erste Kugel fallen ließ. Sind etwa sieben Kugeln aufgehängt, so gehen am anderen Ende eine, zwei oder drei Kugeln in die Höhe, je nachdem, ob man eine Kugel, oder zwei oder drei vereint fallen läßt. Die mittleren Kugeln (fünf oder drei oder eine) bleiben jedoch stets in Ruhe. Natürlich lassen sich Stoßversuche auch mit bloß zwei Kugeln anstellen. Verwendet man zwei weiche Tonkugeln, deren eine man hebt, so nimmt man wahr, daß sich nach dem Stoß beide mit halber Geschwindigkeit bewegen. Zum Nachweis des Reflexionsgesetzes bei dem schiefen elastischen Stoß bedient man sich der in Fig. 120 dargestellten Vorrichtung oder zu genaueren Messungen des in Fig. 121 wiedergegebenen, mit einer Winkelskala versehenen Apparates.

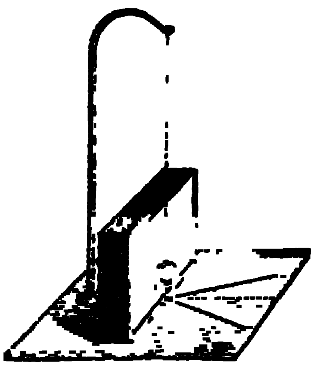


Fig. 120. Schiefer Stoß.

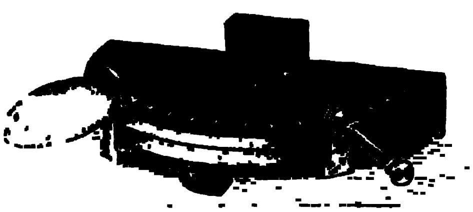


Fig. 121. Schiefer Stoß.

§ 109. Das ballistische Pendel.

Die Gesetzmäßigkeiten des **unelastischen Stoßes** finden eine wichtige Anwendung bei dem **ballistischen Pendel**, das der **Geschwindigkeitsmessung von Projektilen** dient. Es besteht aus einem als Pendel aufgehängten, mit Sand gefüllten Sack, in den das Projektil geschossen wird, dessen Geschwindigkeit bestimmt werden soll. Zwischen dem Geschoß und dem Sack kommt es zu einem unelastischen Stoß; das Pendel erlangt die Geschwindigkeit u, die durch Gl. 137 bestimmt ist und die es bis zu einer Höhe h

hebt, die mit der Geschwindigkeit u durch die bekannte Beziehung verknüpft ist

$$u = \sqrt{2gh}. \tag{140}$$

Ist der maximale Ausschlag des Pendels von der Länge l durch einen Winkel α gegeben, so ist andererseits (vgl. Fig. 122)

$$h = l(1 - \cos\alpha) = 2l\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{141}$$

Nennen wir die Schwingungsdauer des Pendels τ, so ist andererseits nach Gl. 67

$$\sqrt{lg} = g\frac{\tau}{2\pi}. \tag{142}$$

Daher ist

$$u = \frac{g\tau}{\pi}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{143}$$

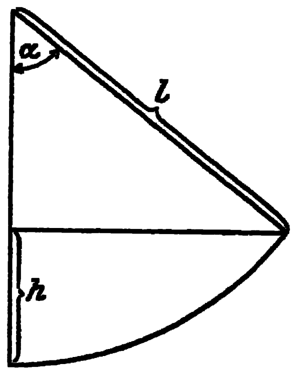


Fig. 122.

Derart läßt sich bei beobachteter Schwingungsdauer aus der Amplitude die Größe u berechnen, und mit ihr ist wiederum die zu bestimmende Projektilgeschwindigkeit v (weil die Masse des Geschosses neben der des Pendels vernachlässigt werden kann) nach Gl. 137 durch die einfache Beziehung verknüpft

$$v = \frac{M}{m}u. \tag{144}$$

Das ballistische Pendel ist von **Robbins** im Jahre 1742 erfunden worden.

Zwölftes Kapitel.

Die Himmelsmechanik.

§ 110. Die Planetenbahnen.

Unter den beobachtbaren Bewegungsvorgängen verdienen die **Bewegungen der Himmelskörper** nicht nur wegen des gigantischen Maßstabes, in dem diese von der Natur selbst ausgeführten Experimente vor sich gehen, das größte Interesse; sondern vor allem auch deshalb, weil hier das völlige Fehlen feststellbarer Bewegungshindernisse mit einer außerordentlichen Meßgenauigkeit vereint ist. Unter den Himmelsbewegungen waren es wiederum seit den frühesten Zeiten vor allem die Bewegungen der **Planeten**, die die Aufmerksamkeit der Astronomen auf sich lenkten.

Während vom geozentrischen Standpunkt aus die exakte Beschreibung der Planetenbahnen ungeheuere Schwierigkeiten be-

reitete, konnen vom heliozentrischen Standpunkt aus, wie zuerst Copernicus (1543) zeigte, die Planetenbahnen in grober Annäherung als um die Sonne beschriebene Kreise angesehen werden; mit größerer Annäherung, wie später Kepler (1609) fand, als Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet. Newton vermochte dann (wie schon in einem früheren Abschnitt, § 86, erwähnt wurde) in der Tat zu beweisen, daß mit dem von ihm aufgestellten Gravitationsgesetz die elliptische Gestalt der Planetenbahnen in unmittelbarem Zusammenhang steht.

In bezug auf ein irgendwie gegebenes räumliches Koordinatensystem erfordert die Festlegung einer elliptischen Bahn, die um die Sonne als einen Brennpunkt beschrieben wird, fünf Bestimmungsstücke: zwei davon sind notwendig, um die Lage der Bahnebene festzulegen (beispielsweise die Winkel, die eine auf der Ebene errichtete Normale mit der x- und der y-Achse einschließt, wodurch auch der Winkel mit der z-Achse dann gegeben ist*); ferner sind es die halbe große Achse, sodann die Exzentrizität und schließlich der Winkel, den in der Bahnebene die Richtung der großen Achse mit einer gegebenen festen Richtung einschließt. Sind diese fünf Bestimmungsstücke bekannt, so braucht man nur noch als sechstes etwa einen Zeitpunkt zu wissen, in dem sich der Planet in größter Sonnennähe, im sogenannten Perihel seiner Bahn, befand**); dann kann man auf Grund der Keplerschen Gesetze für jede beliebige Zeit den Ort des Planeten angeben***).

In Tab. VIII sind für die acht Planeten (für die schon in der früheren Tab. VI in § 86 die halben großen Achsen und die Umlaufszeiten angegeben wurden) die Exzentrizitäten und die Neigungen gegen die Ekliptik (die Bahn der Erdebene) zusammengestellt†). Wie die Tabelle zeigt, sind sowohl die Exzentrizitäten als auch die Neigungen sehr gering.

---

*) Dieser dritte Winkel ist ja durch die Beziehung gegeben, daß die Summe der Quadrate der Kosinus der drei Winkel gleich Eins sein muß.

**) Das Perihel liegt natürlich in der großen Achse der Bahn.

***) In der praktischen Astronomie wählt man als die fünf Bestimmungsstücke einer Planetenbahn: Exzentrizität, Parameter, Knotenlänge, Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik und Abstand des Perihels vom Knoten. Hierzu kommt noch, wenn auch die Bewegung bestimmt werden soll, als sechstes „Bahnelement“ die sogenannte Perihelzeit.

†) Die Exzentrizitäten und Neigungen sind viel genauer bekannt, als sie in Tab. VIII angegeben sind; doch erschien es für die Zwecke dieses physikalischen und nicht astronomischen Buches überflüssig, zu viel Dezimalstellen anzuführen.

Tabelle VIII

	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
Exzentrizität .	0,206	0,007	0.017	0.093	0.048	0.056	0.046	0.009
Neigung . .	7° 0′	3° 24′	0.000	1°51′	1° 18′	2° 30′	0° 46′	1° 47′

Die Lagen der Bahnen der vier sogenannten inneren Planeten sind in Fig. 123 wiedergegeben, während die Bahnen der äußeren Planeten um die Sonne in Fig. 124 dargestellt sind. Die in Fig. 124 bei jeder Bahn eingetragenen drei Kreise (je ein schwarzer, ein schraffierter und ein leerer) geben Stellungen in Intervallen von je einem Jahr an.

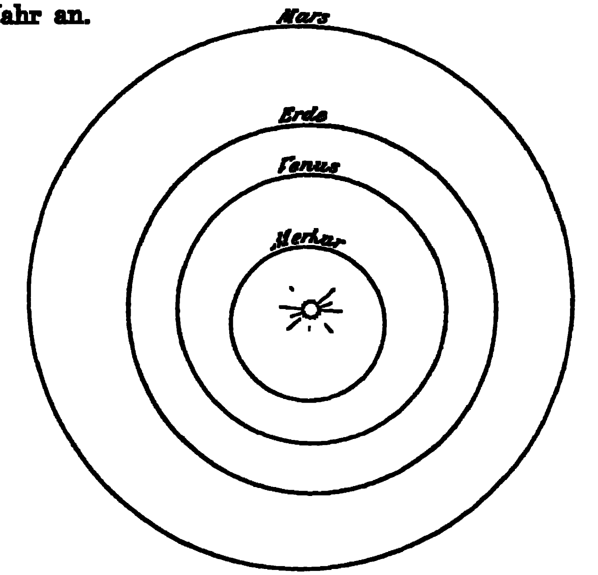


Fig. 123. Die Bahnen der vier inneren Planeten.

Größere Werte als bei den Planeten selbst nimmt die Exzentrizität bei den „kleinen Planeten", den sogenannten Planetoiden, an, deren Bahnen, von wenigen Ausnahmen abgesehen, zwischen den Bahnen des Mars und des Jupiter liegen*). Es betragen die Exzentrizitäten**)

*) Die halben großen Achsen der Planetoiden liegen zwischen 1,4 und 5,3 (auf die halbe große Achse der Erdbahn als Einheit bezogen), während die halbe große Achse des Mars 1,52 und die des Jupiter 5,20 beträgt. Die geringste Entfernung von der Sonne hat Eros, die größte Priamus. Die Umlaufszeiten der Planetoiden betragen meist zwischen 4 und 5 Jahren; bei Eros ist sie aber nur 1,8, bei Priamus hingegen über 12 Jahre.

**) Vgl. Newcomb-Engelmann, Populäre Astronomie, 6. Auflage (Leipzig 1921), S. 395.

zwischen	0,00	und	0,10	bei	248	Planetoiden
„	0,10	„	0,20	„	372	„
„	0,20	„	0,30	„	164	„
„	0,30	„	0,40	„	23	„
„	0,40	„	0,50	„	1	„
„	0,50	„	0,60	„	2	„

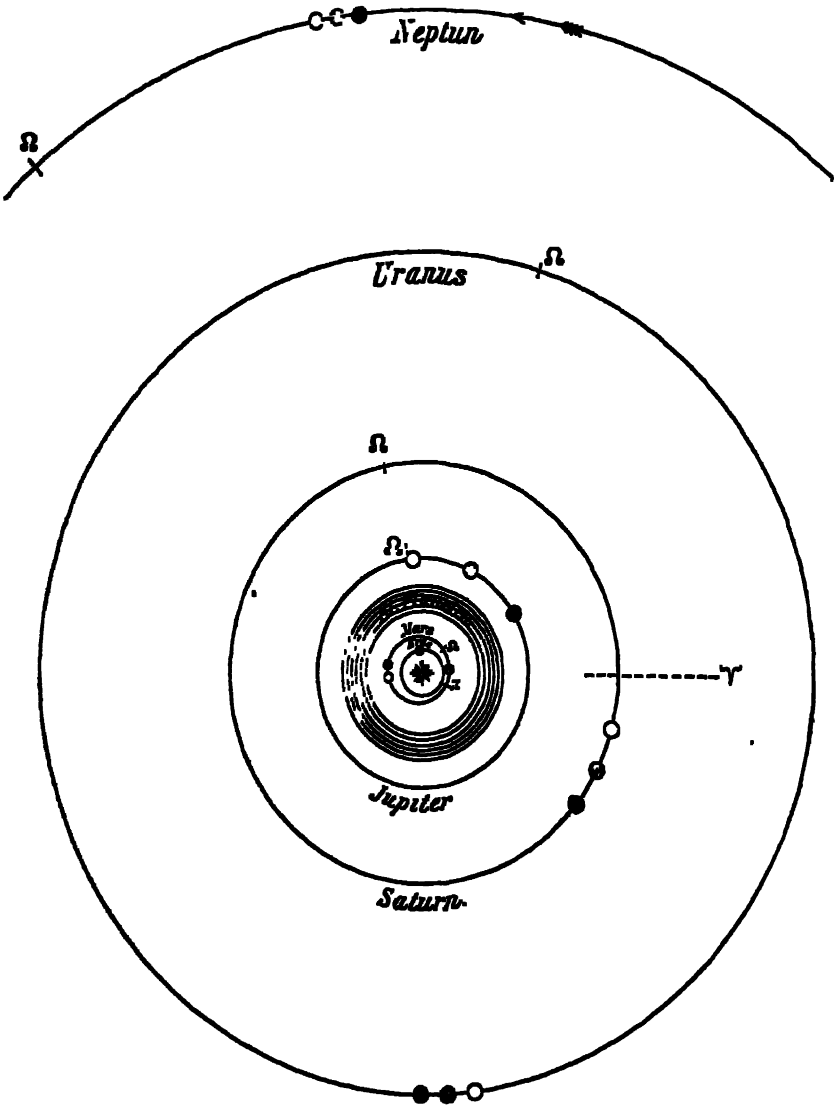


Fig. 124. Bahnen der äußeren Planeten sowie des Mars und der Erde.

Die größten Exzentrizitäten (0.54 und 0,53) sind bei den Planetoiden Albert (Nr. 719) und Alinda (Nr. 887) festgestellt, während bei den Planetoiden Nr. 330 und 398 die Exzentrizität zu 0,00 bestimmt wurde, bei diesen also eine Abweichung von der Kreisform nicht erkennbar ist.

Was die Neigungen gegen die Ekliptik betrifft, so ergaben sie sich

zwischen	0°	und	8°	bei	372	Planetoiden
„	8°	„	16°	„	333	„
„	16°	„	24°	„	83	„
„	24°	„	32°	„	18	„
„	32°	„	35°	„	3	„

Die invariable Ebene, die man, wie Laplace gezeigt hat, gemäß dem Satze von der Erhaltung des gesamten Drehimpulses im Sonnensystem annehmen muß, weicht nur wenig von der Ekliptik ab. Die beiden Ebenen sind gegeneinander um einen Winkel von 3° 6′ geneigt*). Bemerkenswert ist schließlich, daß alle Planeten und Planetoiden denselben Umlaufssinn zeigen.

§ 111. Die Bahnbestimmung.

Sind die sechs astronomischen Bestimmungsstücke einer Planetenbahn gegeben, wie dies im vorhergehenden Abschnitt dargelegt wurde, so ist es keine besonders schwierige mathematische Aufgabe, die Bewegung des Himmelskörpers, namlich seine jeweilige scheinbare Lage am Firmament vorauszuberechnen. Diese Aufgabe, bei der die Vorausberechnung zunächst für die nächsten Tage erfolgt, wird als Ephemeridenproblem bezeichnet (nach dem griechischen Worte Hemera = Tag). Dieses Problem wurde bereits von Kepler vollständig gelöst.

Die Umkehrung des Ephemeridenproblems besteht in der Aufgabe, die noch unbekannten sechs Bahnelemente eines sich um die Sonne bewegenden Himmelskörpers aus einer Reihe scheinbarer Orte am Firmament, die zu bestimmten Zeiten beobachtet wurden, zu berechnen. Der Sinn dieses Problems möge durch Fig. 125 veranschaulicht werden. Es seien E_1, E_2, E_3 die Stellungen der Erde an drei aufeinanderfolgenden Tagen, etwa zu derselben Stunde, und zwar zu den Zeiten, zu denen der Himmelskörper beobachtet wird, dessen Bahn bestimmt werden soll. Die Beobachtungen ergeben die

*) Vom theoretischen Standpunkte aus ist es natürlich richtiger, die Neigungen gegen die unveränderliche Ebene den Untersuchungen zugrunde zu legen.

Richtungen E_1A_1, E_2A_2 und E_3A_3. Für die betreffenden Zeiten stellen diese Geraden die Verbindungslinie zwischen der Erde und dem Himmelskörper dar. Es entsteht nun die geometrische Aufgabe, einen Kegelschnitt um die Sonne (S) als Brennpunkt derart zu konstruieren, daß eine Bewegung, die in diesem Kegelschnitt mit einer in bezug auf die Sonne konstanten Flächengeschwindigkeit erfolgt, zu den gegebenen Beobachtungszeiten die drei vorhin erwähnten Geraden schneidet.

Wie die Theorie zeigt, ergeben in der Tat die drei Beobachtungen, die zu der Feststellung der Richtungen der drei Geraden führen, in Verbindung mit den gegebenen Beobachtungszeiten sechs Gleichungen, die als Unbekannte die gesuchten sechs Bahnelemente enthalten. Allerdings sind die Gleichungen zu kompliziert, als daß ihre direkte Auflösung möglich wäre. Die allgemeine Lösung des Problems der Bahnbestimmung ist zuerst Gauss (1801) gelungen*). Von aktueller Bedeutung wird das Problem der Bahnbestimmung, sooft ein neuer Planetoid oder Komet entdeckt wird. In der Tat gab die erste Entdeckung eines Planetoiden (die Entdeckung der Ceres in der ersten Nacht des 19. Jahrhunderts) Gauss den Anlaß zu der Ausbildung seiner Methode, wodurch die Wiederauffindung des der Beobachtung zunächst entschwundenen Planetoiden ermöglicht wurde.

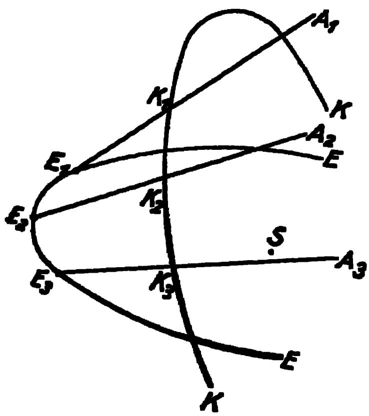


Fig. 125. Bahnbestimmung.

§ 112. Die astronomische Massenbestimmung.

Da sich gemäß dem dritten Keplerschen Gesetz um die Sonne die Planeten, um die meisten Planeten aber wieder Trabanten bewegen, so können auf Grund dieses Gesetzes mit großer Genauigkeit die Massen der Sonne und der meisten Planeten untereinander verglichen werden. Bezeichnen wir nämlich für einen beliebigen Planeten mit C das Verhältnis zwischen der dritten Potenz seiner halben großen Achse und dem Quadrate seiner Umlaufszeit und mit C' dasselbe Verhältnis für irgendeinen Trabanten eines be-

*) Für den speziellen, viel einfacheren Fall einer parabolischen Bahn hat vor Gauss das Problem der Bahnbestimmung bereits Olbers (1797) gelöst.

stimmten Planeten, so gilt nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz die Beziehung (vgl. Gl. 111)

$$C : C' = m : m', \tag{145}$$

wenn m die Masse der Sonne und m' die des Planeten ist.

Aus den Ergebnissen eines früheren Abschnitts (§ 87) würde somit folgen, daß beispielsweise die Masse des Jupiters 1048mal und die der Erde rund 330000 mal kleiner als die der Sonne ist. Diese Werte sind allerdings ungenau; für eine genauere Berechnung muß berücksichtigt werden, daß der Umlauf bei einem Zweikörpersystem nicht um den größeren Körper, sondern um den gemeinsamen Schwerpunkt erfolgt.

Aus der beobachtbaren Beschleunigung des freien Falls und der experimentell ermittelten Gravitationskonstante läßt sich aber nun (gemäß Gl. 115) die Masse der Erde in absolutem Maß (etwa in Grammen) bestimmen. Da auch die Erde einen Trabanten hat, kann mit ihrer Masse die der Sonne und die der übrigen Planeten verglichen werden.

Auf die Masse der Erde bezogen, beträgt die Masse der Sonne 333 432; die Massen der Planeten sind in demselben Maß:

Merkur	Venus	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
0,06	0,82	0,11	318,36	95,22	14,58	17,26.

In absolutem Maß, und zwar in Grammen, erhält man diese Massen, indem man sie mit der Zahl $6{,}0 \cdot 10^{27}$ multipliziert, welche Zahl die Masse der Erde in Grammen ausdrückt.

Die Masse der Trabanten kann unter Umständen ebenso wie die von Merkur, Venus und den Planetoiden aus den später näher zu erörternden Störungen berechnet werden, die sie in den Bewegungen anderer Himmelskörper hervorrufen. So findet man (auf die Erde als Einheit bezogen) für die Masse des Erdmondes 0,0123; die Masse des größten Jupitermondes ist etwa doppelt so groß. Bei den Planetoiden ist nur eine grobe Schätzung der Masse auf Grund von Annahmen über ihre Dimensionen möglich. Die Gesamtmasse aller bekannten Planetoiden (mehr als 1000) dürfte nicht viel mehr als den 1000. Teil der Erdmasse betragen; bei ihrer vielen dürfte der Durchmesser nicht größer sein als einige wenige Kilometer, ihre Oberfläche also nicht größer als der Flächeninhalt einer Großstadt.

Auch bei solchen Fixsternen, die sich als Doppelsterne erwiesen, konnte (wovon später noch eingehender die Rede sein soll) die Masse der beiden Komponenten berechnet werden. Es ist sehr merkwürdig, daß unter den Doppelsternen keiner gefunden wurde,

dessen Gesamtmasse kleiner wäre als drei Zehntel der Sonnenmasse, aber auch keiner, dessen Masse die Sonnenmasse mehr als 50fach übertreffen würde.

Die Masse der Sonne ist außerordentlich groß gegenüber der der Planeten; selbst der größte aller Planeten, der Jupiter, hat eine 1000mal kleinere Masse*). Infolgedessen ist auch der Fehler bedeutungslos, der dadurch begangen wird, daß man die Bewegung der Planeten so behandelt, als ob sie um die Sonne erfolgen würde, während tatsächlich diese Bewegung gemäß den Keplerschen Gesetzen um den gemeinsamen Schwerpunkt der Sonne und des betreffenden Planeten vor sich geht. Wie gering der dadurch verursachte Fehler ist, zeigt deutlich das Beispiel des aus Sonne und Erde zusammengesetzt gedachten Zweikörpersystems. Von dem gemeinsamen Schwerpunkt ist das Sonnenzentrum nur um 450 km entfernt; das ist nur der 3000. Teil des Sonnenhalbmessers.

§ 113. Die Störungen der Planetenbahnen.

Da die Gravitation eine universelle Eigenschaft aller Materie ist, so wird ein jeder Planet ebenso wie von der Sonne auch von allen übrigen Planeten angezogen, wenn auch freilich die Wirkungen dieser Anziehungen sehr gering sind im Vergleich zu der seitens der Sonne ausgeübten Attraktion. Die Folge davon ist, daß die Bahnelemente der Planetenellipsen dauernden Veränderungen unterliegen, die wegen ihrer Langsamkeit als säkulare Störungen der Planetenbahnen bezeichnet werden.

Das Vorhandensein solcher Störungen ist bereits von Copernicus und Kepler nachgewiesen worden, indem diese zeitgenössische Beobachtungen mit solchen des Ptolemäus verglichen und dabei gewisse Veränderungen feststellten. Die Astronomen des 18. Jahrhunderts erkannten die Ursache dieser Veränderungen ganz richtig in den Störungen durch die anderen Planeten, und sie legten sich begreiflicherweise die interessante Frage vor, ob diese Veränderungen im Laufe der Jahrtausende nicht so beträchtlich werden könnten, daß dadurch etwa eine völlige Veränderung des irdischen Klimas herbeigeführt würde. Erst Laplace hat in exakter Weise nachgewiesen, daß die sogenannten säkularen Störungen periodische Schwankungen darstellen, die innerhalb verhältnismäßig enger Grenzen erfolgen, so daß die Stabilität des Planetensystems durch diese Schwankungen überhaupt nicht gefährdet wird.

---

*) Die vereinigten Massen aller Planeten betragen nur ungefähr $^1/_{750}$ der Sonnenmasse. Die Masse des Jupiter ist wiederum größer als die aller anderen Planeten zusammengenommen.

Wie Laplace nachwies, werden die großen Achsen der Planetenbahnen durch die Störungen nicht verändert; Schwankungen erfahren durch die Störungen nur die Exzentrizität und die Neigung gegen die Ekliptik. Noch geringer sind übrigens die Schwankungen, wenn die Neigung statt auf die Ekliptik auf die invariable Ebene des Sonnensystems bezogen wird. Die Größe der Schwankungen ist aus der Tab. IX ersichtlich.

Tabelle IX.
Die säkularen Störungen der Planetenbahnen.

	Grenzen der Exzentrizität		Grenzen der Neigung gegen die invariable Ebene	
Merkur . .	0,1215	0,2317	4° 44′	9° 11′
Venus. . .	0,0000	0,0706	0° 0′	3° 16′
Erde . .	0,0000	0,0694	0° 0′	3° 6′
Mars . .	0,0185	0,1397	0° 0′	5° 56′
Jupiter . .	0,0255	0,0608	0° 14′	0° 29′
Saturn . .	0,0124	0,0843	0° 47′	1° 1′
Uranus . .	0,0118	0,0780	0° 54′	1° 7′
Neptun .	0,0056	0,0145	0° 34′	0° 47′

Die Perioden dieser Schwankungen betragen zwischen 50 000 und 2 000 000 Jahren. Sie sind also durchwegs viel größer als die Zeit, über die sich die bisherigen astronomischen Beobachtungen der Menschheit erstrecken, und es ist daher selbstverständlich, daß die alleinige Beobachtung bloß fortschreitende Änderungen erkennen lassen kann; nur durch theoretische Überlegungen konnte deren periodischer Charakter offenbar werden. Im übrigen entstehen die periodischen Schwankungen durch Superposition von einzelnen Schwankungen von verschiedener Periode; die Zahl dieser Schwankungen kann wiederum als übereinstimmend angenommen werden mit der Zahl der als störend in Betracht kommenden Himmelskörper.

Eine Folge der Störungen ist es auch, daß sich die Perihelien der einzelnen Bahnen allmählich die ganze Bahn entlang bewegen.

§ 114. Die Mondbewegung.

Von großer mechanischer Kompliziertheit erweist sich die Bewegung des Mondes, weil hierbei kein einfaches Störungsproblem, sondern das allgemeinere und viel schwierigere Dreikörperproblem vorliegt. Denn die Anziehung, die die Sonne und die Erde auf den Mond ausüben, sind von derselben Größenordnung. Wohl ist die Entfernung des Mondes von der Sonne rund 390 mal so groß wie sein Abstand von der Erde; aber andererseits ist, wie schon erwähnt

wurde, die Masse der Sonne 330000 mal so groß wie die der Erde. Gemäß dem Gravitationsgesetz ergibt sich also die Wirkung der Sonne auf den Mond rund doppelt so groß wie die der Erde. Infolge dessen schwankt die Entfernung des Mondes von der Erde sehr beträchtlich während eines Umlaufs, nämlich zwischen 357 000 und 407 000 km.

Von großem theoretischem Interesse ist die sogenannte **säkulare Beschleunigung der Mondbewegung**. **Halley** hatte schon im Beginn des 18. Jahrhunderts, indem er Mitteilungen über im Altertum beobachtete Mondfinsternisse mit neueren Beobachtungen verglich, eine derartige Akzeleration festgestellt. Als Ursache hiervon erkannte **Laplace** (nachdem er lange vergebens danach gesucht hatte) die früher erwähnte säkulare Verringerung der Exzentrizität der Erdbahn. Hieraus berechnete **Laplace** eine Mondbeschleunigung von 10 Bogensekunden im Jahrhundert, was mit den tatsächlichen Beobachtungen vollkommen übereinzustimmen schien. Neuere Rechnungen ergaben aber für die durch die Verminderung der Exzentrizität der Erdbahn verursachte Mondbeschleunigung nur 6″ im Jahrhundert. Die Differenz von 4″ ist noch nicht in befriedigender Weise aufgeklärt.

§ 115. Ebbe und Flut.

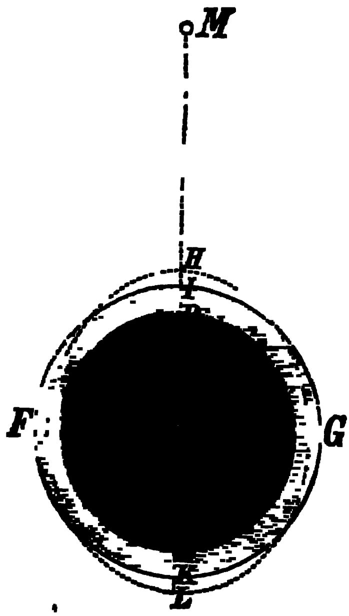


Fig. 126. Ebbe und Flut.

Die Anziehung, die auf die Erde ihr nächster Himmelskörper, der **Mond**, ausübt, äußert sich deutlich und in gewaltigem Maßstab in dem bekannten Phänomen von **Ebbe und Flut**. Der Erklärung dieser Erscheinung möge die Fig. 126 dienen. Es stelle der schwarz ausgefüllte Kreis die feste Erde dar, die wir uns der Einfachheit wegen überall mit Meeren bedeckt denken (die durch den schraffierten Ring angedeutet seien); der kleine Kreis M stelle den Mond dar.

Nach dem Gravitationsgesetz muß die Anziehung auf der dem Monde zugewendeten Seite jedenfalls stärker sein als auf der gegenüberliegenden Seite. Dadurch zieht der Mond bei I sozusagen das Meer von der Erde,

hingegen bei K die Erde vom Meere weg. Die Folge davon ist eine Erhebung des Meeres über die Erdoberflache an beiden Stellen (IH und KL). An beiden Stellen findet also Flut statt, hingegen tritt Ebbe an den beiden Stellen ein, die in Fig. 126 mit F und G bezeichnet sind.

Da der Mond infolge seines Umlaufs um die Erde täglich um etwa $^3/_4$ Stunden später als an dem Vortag aufgeht, so rotiert in bezug auf den Mond ein Punkt der Erde mit einer Periode von ungefähr $24^3/_4$ Stunden. Innerhalb dieser Periode tritt also für jeden Punkt der Meeresküste zweimal Flut und zweimal Ebbe ein. In den Äquatorialgegenden sind die Fluterscheinungen stärker als in Gegenden höherer Breite, weil der Umlauf des Mondes ungefähr in der Äquatorialebene der Erde erfolgt. Im übrigen bewirkt aber der störende Einfluß der Kontinente und Inseln eine Verzögerung, die an manchen Orten viele Stunden betragen kann.

Ebenso wie der Mond bringt auch die Sonne eine Flut hervor; allerdings entspricht diese einer Wirkung, die nur etwa 40% der Flutwirkung des Mondes ausmacht. Zur Zeit des Neu- und des Vollmondes vereinigen sich die Wirkungen von Mond und Sonne und rufen derart die sogenannten Springfluten hervor, während im ersten und letzten Mondviertel die entgegengesetzte Wirkung von Mond und Sonne in den sogenannten Nippfluten zu einer Abschwächung der Fluterscheinung führt.

§ 116. Die Bewegung der Achillesgruppe.

Unter den zahllosen interessanten mechanischen Problemen, die das Sonnensystem darbietet, ist besonders eines erwähnenswert, zu dem die Beobachtung einiger kleiner Planeten führt, die von der Sonne und dem Jupiter gleich weit entfernt sind. Diese Planeten werden gewöhnlich als die „Trojaner" bezeichnet, weil sie nach Helden des trojanischen Krieges benannt wurden (Achilles, Patroklus, Hektor, Nestor, Priamus)*).

Die Bewegung dieser Planeten bildet nämlich ein Beispiel für einen Spezialfall des Dreikörperproblems, der schon lange vor der Entdeckung dieser Planeten von Lagrange in exakter Weise gelöst worden war. Dieser Spezialfall wird durch drei Massenpunkte dargestellt, die sich in einer Ebene um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen und zu irgendeiner Zeit gleiche Abstände

*) Während die halbe große Achse der Jupiterbahn (auf die Erdbahn als Einheit bezogen) 5,20 ist, betragen die halben großen Bahnachsen von Achilles, Patroklus, Hektor, Nestor und Priamus 5,25; 5,18; 5,25; 5,19 und 5,26.

voneinander haben, also zu irgendeiner Zeit die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Ist dies in einem Augenblick genau der Fall, so müssen, wie Lagrange zeigte, die drei Körper dauernd diese gegenseitige Lage beibehalten. Aber auch wenn dies in irgendeinem Augenblick nur angenähert der Fall ist, so müssen wenigstens, wie Lagrange nachwies, die Körper um die Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks in einer periodischen Schwankung herumpendeln, also sogenannte Librationen ausführen. In der Tat zeigt die astronomische Beobachtung derartige Librationen bei den Planeten der Achillesgruppe. Aus der Theorie folgt beispielsweise, daß der Unterschied der mittleren täglichen Bewegung von Jupiter und Achilles kleiner als 8″ bleiben muß, während die derzeitigen Beobachtungen einen Unterschied von ungefähr 4″ ergeben.

§ 117. Die Bewegung der Saturntrabanten Titan und Hyperion.

Ein sehr interessanter mechanischer Spezialfall erscheint auch bei dem Dreikörpersystem verwirklicht, das wir uns aus dem Saturn und zweien seiner Trabanten, nämlich Titan und Hyperion, gebildet denken können. (Von den zehn Saturnmonden ist, wenn die Zählung in üblicher Weise nach wachsendem Abstand von dem Planeten vorgenommen wird, Titan der sechste und Hyperion der achte.)

Das Merkwürdige ist nun, daß die Umlaufszeiten von Titan und Hyperion in einem fast genau ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen, indem Titan in derselben Zeit von 64 Tagen, in der Hyperion drei Umläufe ausführt, deren vier vollendet*). Infolgedessen findet alle 64 Tage eine sogenannte Konjunktion zwischen den beiden Trabanten statt, d. h. in solchen Perioden kommen sie einander am nächsten. Da aber das Verhältnis der Umlaufszeiten etwas von $^3/_4$ abweicht, verschieben sich die Konjunktionspunkte allmählich. Ist beispielsweise bei einer Konjunktion der innere und größere Trabant Titan bei A und der äußere und kleinere Hyperion bei a (Fig. 127), so findet die nächste Konjunktion bei B und b statt; derart wandern die Konjunktionspunkte im Laufe von 19 Jahren einmal um die beiden Kreise herum. Die Bahn des Hyperion ist ziemlich exzentrisch; die Konjunktionen treten immer dort ein, wo die Entfernung der beiden Bahnen am größten ist. Die

*) In Halbmessern des Saturn ausgedrückt, sind die Entfernungen vom Saturn 20 bei Titan und 24 bei Hyperion.

große Achse der Hyperionbahn wird mit dem Konjunktionspunkt mitgeführt. Die allmähliche Änderung, die infolgedessen die Bahn des Hyperion erfährt, ist aus der Fig. 127 ersichtlich, in der die punktierte Kurve die Bahn 9 Jahre nach der in den Punkten A und a eingetretenen Konjunktion darstellt.

Ähnliche Verhältnisse bestehen übrigens auch zwischen dem ersten und dritten Saturnmond, deren Umlaufszeiten sich ziemlich

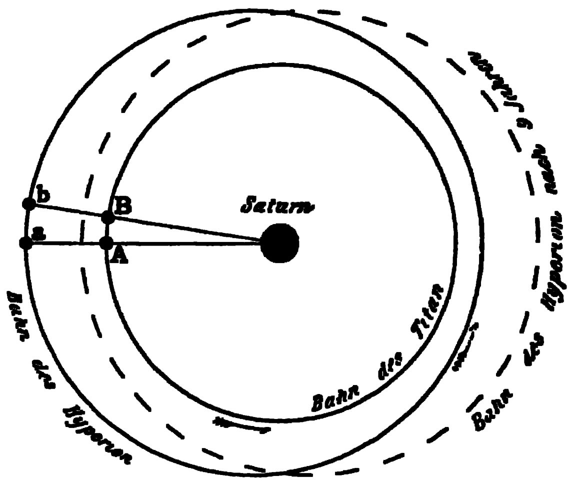


Fig. 127. Die Bahnen der Saturntrabanten Titan und Hyperion.

genau wie 1 : 2 verhalten, und ebenso zwischen dem zweiten und vierten Saturnmond, zwischen deren Umlaufszeiten dasselbe Verhältnis besteht*). Bemerkenswert ist schließlich auch, daß infolge der wechselseitigen Anziehung zwischen dem Saturn und seinen Ringen sich alle Trabanten des Saturn mit alleiniger Ausnahme des äußersten (des zehnten) ziemlich genau in der Äquatorialebene des Saturn bewegen.

§ 118. Die Bewegungen der Kometen.

Während die Bahnexzentrizität, wie schon erwähnt wurde, bei den Planeten sehr gering ist und nur bei den Planetoiden ganz ausnahmsweise den Wert $^1/_2$ erreicht, weisen die Bahnen der Kometen fast durchwegs eine beträchtliche Exzentrizität auf, die bei den meisten von ihnen nur sehr wenig von dem für die Parabel charakteristischen Grenzwert Eins verschieden ist. Unter

---

*) Die Entfernungen des ersten, zweiten, dritten und vierten Mondes vom Saturnzentrum betragen 3, 4, 5 und 6 Saturnradien, die entsprechenden Umlaufszeiten 23, 33, 45 und 66 Stunden.

rund 400 berechneten Kometenbahnen haben nur etwa 40 eine Exzentrizität von weniger als 0,95. Als Beispiel einer Kometenbahn ist in Fig. 128 die des Halleyschen Kometen dargestellt, die bei einer Exzentrizität von 0,97 und einer Umlaufszeit von etwa 75 Jahren bis über die Neptunbahn hinausreicht*).

Bei vielen Kometen ist die Bahn insofern als parabolisch anzusehen, als aus den Beobachtungen nicht festgestellt werden kann, ob die Exzentrizitat ein wenig kleiner oder ein wenig großer als Eins ist, ob also die Bahn geschlossen ist oder nicht. Ist die Exzentrizität größer als Eins, so wird die Bahn hyperbolisch, so daß die Parabel als Grenzfall zwischen Ellipse und Hyperbel erscheint (vgl. Fig. 129).

In der Tat sind hyperbolische Bahnen bei einigen Kometen festgestellt worden; aber gleichwohl braucht bei ihnen nicht angenommen zu werden, daß sie als fremde Gäste in das Sonnensystem gerieten. Man kann auch bei ihnen annehmen, daß sie von Anfang an dem Sonnensystem angehörten (also aus der Urmaterie des Sonnensystems entstanden sind), daß aber ihre ursprünglich elliptische Bahn so exzentrisch war, daß bereits eine geringe Änderung der Exzentrizität die geschlossene Bahn in eine ungeschlossene verwandeln konnte. Eine solche Änderung kann eintreten, wenn der Komet in seiner Bahn einem Planeten nahekommt und die dadurch bedingte Störung der Kometenbahn die Geschwindigkeit des Kometen erhöht.

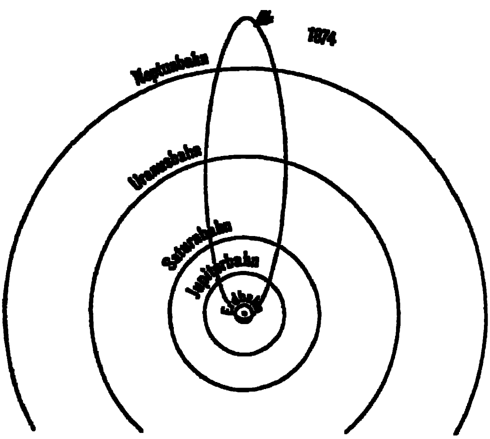


Fig. 128. Die Bahn des Halleyschen Kometen.

*) Die kleinste bei einem Kometen bisher festgestellte Exzentrizität beträgt 0,4. Mehr als die Hälfte der bekannten Kometen kommen im Perihel der Sonne näher als die Erde. Die kleinste, bisher beobachtete Periheldistanz beträgt nur den zweihundertsten Teil der Entfernung zwischen Sonne und Erde. Die kürzeste Umlaufszeit weist unter allen Kometen der Enckesche Komet auf, nämlich rund $3^1/_4$ Jahre. Bemerkenswert ist, daß fast die Hälfte der Kometen eine rückläufige Bewegung gegenüber den Planetenbahnen zeigen, so auch der Halleysche Komet.

Jeder Entfernung von der Sonne entspricht nämlich eine ganz bestimmte „kritische“ Geschwindigkeit, für die die Bahn parabolisch ist, während bei kleinerer Geschwindigkeit die Bewegung elliptisch, bei größerer hyperbolisch wird*). Wenn die Masse der Sonne mit M, die Distanz von ihr mit r und die Gravitationskonstante, wie früher, mit f bezeichnet wird, so ist (nach § 104) die kritische Geschwindigkeit durch die Beziehung gegeben

$$v^* = \sqrt{\frac{2fM}{r}}. \qquad 146$$

In dem Abstand, den von der Sonne die Erde hat, beträgt beispielsweise die kritische Geschwindigkeit 42 km/sec, also rund das $1^1/_2$fache der tatsächlichen Erdgeschwindigkeit**). In einer Entfernung von

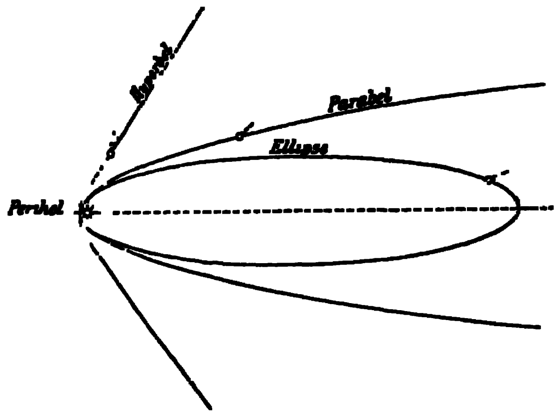


Fig. 129. Die Parabel als Grenzfall zwischen Ellipse und Hyperbel.

*) Es kommen daher genau parabolische Bahnen nicht vor, da ja die Parabel nur einen idealen Grenzfall darstellt.

**) Ersetzen wir in der Gl. 146 die Sonnenmasse durch die rund 300000 mal kleinere Erdmasse, und setzen wir statt der Erdweite den rund 22000 mal kleineren Erdradius, so erhalten wir mit rund 11 (genauer 11,18) km/sec die kritische Geschwindigkeit für die Erdoberfläche. Ein mit dieser Geschwindigkeit horizontal abgefeuertes Geschoß würde sich im Himmelsraum verlieren. Zur Erde fällt ein horizontal geworfener Körper nur dann nieder, wenn das durch den Erdradius gebrochene Quadrat seiner Geschwindigkeit (also seine Zentrifugalbeschleunigung) kleiner als die Beschleunigung des freien Falls ist; dazu muß sie geringer sein als 7,9 km/sec. Dann beschreibt er eine Ellipse, deren näherer Brennpunkt von dem Erdmittelpunkt gebildet wird, wobei allerdings wegen der außerordentlich großen Exzentrizität die Ellipse praktisch als Parabel angesehen werden kann. Ist hingegen die Geschwindigkeit zwischen 7,9 und 11,18 km/sec, so ist der Erdmittelpunkt der entferntere Brennpunkt der Ellipse. Der Geschwindigkeit von 7,9 km/sec entspricht eine Kreisbewegung um den Erdmittelpunkt als Zentrum.

x Erdweiten ist (in Kilometern pro Sekunde ausgedrückt) die kritische Geschwindigkeit gleich $42/\sqrt{x}$.

In der Tat haben nun genaue (allerdings ungemein umständliche) Berechnungen ergeben, daß man bei genügend langer Zurückverfolgung der als hyperbolisch festgestellten Kometen stets auf eine beträchtliche Störung durch einen Planeten stößt, derart, daß hierbei durch eine Geschwindigkeitsvermehrung eine bis dahin elliptische Bewegung in eine schwach hyperbolische verwandelt wurde.

Umgekehrt kann natürlich auch die Störung durch einen Planeten die Geschwindigkeit vermindern und derart eine lang-

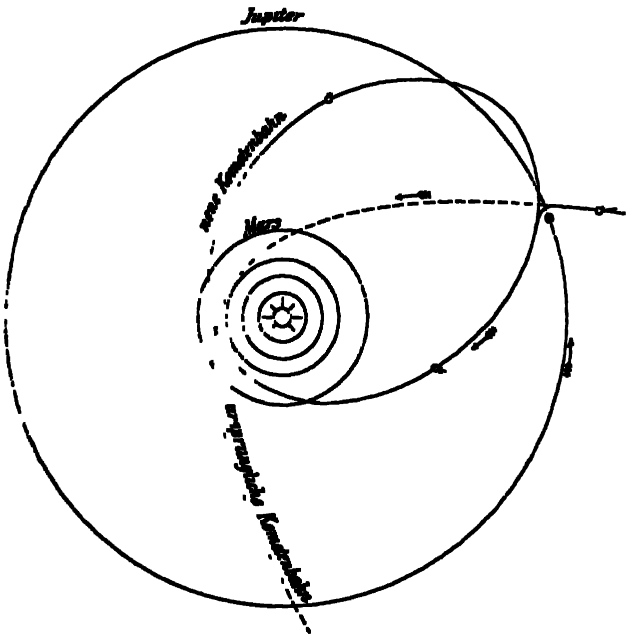


Fig. 130. Umgestaltung einer Kometenbahn durch den Jupiter.

gestreckte elliptische Bahn in eine von wesentlich geringerer Exzentrizität und daher auch viel geringerer Umlaufszeit verwandeln. Ein Beispiel dafür, wie derart eine ursprünglich fast parabolische Kometenbahn durch den Planeten Jupiter in eine kurzperiodische umgestaltet werden kann, ist aus Fig. 130 ersichtlich; diese Figur stellt die im Jahre 1767 erfolgte Umwandlung der Bahn des Lexellschen Kometen dar*).

*) Wie genaue Untersuchungen ergaben, kam der Lexellsche Komet im Jahre 1767 dem Jupiter so nahe, daß er durch ihn in eine kurz-

§ 119. Die Bewegungen der Doppelsterne.

Das großartigste astronomische Beispiel für die Verwirklichung des **Zweikörperproblems** stellen die **Doppelsterne** dar, deren die moderne Himmelskunde weit über 10 000 kennt. Bei einer größeren Zahl unter ihnen ist es möglich gewesen, die Bewegungen der beiden Komponenten relativ zueinander genau zu berechnen. Die Methoden, die dies ermöglichen und die um das Jahr 1830 von **Savary, Encke** und dem jüngeren **Herschel** ersonnen wurden, gründen sich durchwegs auf das **Newtonsche Gravitationsgesetz**, und in der Tat hat später **Tisserand** nachgewiesen*), daß **nur** dieses Gesetz die Bewegungen der Doppelsterne zu erklären vermag.

Von dem Problem der Bewegung eines Planeten um die Sonne unterscheidet sich das Problem der Doppelsternbahnen dadurch, daß hier die Massen beider Komponenten in der Größenordnung übereinstimmen und daher der Schwerpunkt des Zweikörpersystems weit außerhalb der beiden Körper liegt. In rechnerischer Beziehung ist wiederum das Problem deshalb von dem der Planetenbewegung verschieden, weil die Entfernungen der Doppelsterne derart groß sind, daß die Ortsveränderung, die die Erde während der Beobachtung erfährt, vollkommen vernachlässigt werden kann. Andererseits entsteht aber eine wesentliche Komplikation dadurch, daß die Massen der beiden Sterne und somit auch die relative Lage des Schwerpunktes nicht von vornherein bekannt sind.

Als Beispiel eines Doppelsternes sei der bekannte helle Stern **Kapella** im Sternbild des Fuhrmanns angeführt. Die beiden Komponenten haben Massen, die 4,6 bzw. 3,6 mal so groß sind wie die Sonnenmasse. Der wechselseitige Abstand ist etwas kleiner als die Entfernung der Erde von der Sonne, und die Umlaufszeit beträgt 104 Tage. Durch die Beobachtung der Bewegungen der Doppelsterne ist jedenfalls die Gültigkeit des **Newton**schen Gravitationsgesetzes noch in Entfernungen erwiesen worden, die millionenmal größer sind als die Distanz der Sonne von uns.

§ 120. Die Anomalien der Himmelsmechanik.

Die auf das **Newton**sche Gravitationsgesetz gegründeten Rechnungen ergeben vollkommene Übereinstimmung zwischen den Folge-

---

periodische Bahn von $5^1/_2$ Jahren Umlaufszeit gewungen wurde. In dieser Bahn bewegte sich der **Lexell**sche Komet durch 12 Jahre. Dann kam er wieder dem Jupiter nahe, der seine Bahn wieder zu einer sehr exzentrischen machte.

*) Vgl. dessen Traité de mécanique céleste (Paris 1889—96).

rungen aus der Theorie und der tatsächlichen Beobachtung, bis auf einige ganz wenige geringfügige *Anomalien*, die zum Teil noch der Erklärung harren. Vom theoretischen Standpunkt aus sind diese Anomalien besonders bemerkenswert, weil sich aus ihnen Schlüsse über die Gültigkeitsgrenzen des Gravitationsgesetzes allenfalls ziehen lassen. Die Anomalien sind die folgenden:

1. Eine Anomalie in der *Perihelbewegung des Planeten Merkur*, indem für diese säkulare Störung die Beobachtung einen um 41 (± 2) Bogensekunden im Jahrhundert *größeren* Wert ergibt, als er nach der *Newtonschen* Gravitationstheorie bei Berücksichtigung der Störungen durch die anderen Planeten resultiert (nämlich 574″ statt 533″);

2. eine Anomalie in der Bewegung des Planeten *Venus* (die sogenannte Knotenlänge in der Bahn der Venus weist eine Anomalie von 10 (± 4) Bogensekunden in einem Jahrhundert auf);

3. eine Anomalie in der Bewegung des *Mars* (die Perihellänge zeigt eine unerklärte säkulare Störung von 8 (± 3,5) Bogensekunden in einem Jahrhundert);

4. die schon erwähnte Anomalie in der säkularen Akzeleration des *Mondes*, wobei auch die Größe der Beschleunigung noch nicht aufgeklärten periodischen Schwankungen zu unterliegen scheint;

5. eine Anomalie des *Enckeschen Kometen*, die sich in einer Verkürzung seiner etwa 3,305 Jahre betragenden Umlaufszeit um 1—2 Stunden von Umlauf zu Umlauf äußert.

§ 121. Astronomische Geschwindigkeiten.

Die *Geschwindigkeiten* der Himmelsbewegungen sind ungeheuer groß im Vergleich zu den größten Geschwindigkeiten, die wir im täglichen irdischen Leben wahrnehmen. Die Geschwindigkeit, mit der sich die *Erde um die Sonne* bewegt, beträgt beispielsweise 30 km in der Sekunde, d. h. die Erde legt in ungefähr 2 Sekunden dieselbe Strecke zurück, zu der ein Schnellzug 1 Stunde brauchen würde. Die Geschwindigkeit, mit der die Sonne innerhalb des Sternsystems den Raum durcheilt, beträgt 20 km/sec. Von derselben Größenordnung sind die meisten festgestellten *Eigengeschwindigkeiten von Fixsternen*. Doch kommen auch Geschwindigkeiten von einigen hundert Kilometern in der Sekunde vor; so sind bei einigen Sternen die Geschwindigkeitskomponenten in der Blickrichtung, die sogenannten Radialgeschwindigkeiten, zu mehr als 400 km/sec ermittelt worden*).

---

*) Die größten Radialgeschwindigkeiten wurden festgestellt bei den

So ungeheuer groß nun aber auch solche Geschwindigkeiten sind, sie sind gleichwohl verschwindend klein im Vergleich zu den größten Geschwindigkeiten, die bei mechanischen Vorgängen in irdischen Laboratorien durch die moderne Atomphysik festgestellt wurden und die sich der Lichtgeschwindigkeit, also 300 000 km/sec, als oberer Grenze nähern. Wie die Schnellzugsgeschwindigkeit nur ungefähr ein Tausendstel der häufigsten astronomischen Geschwindigkeiten darstellt, so erfolgen andererseits selbst die rasendsten Sternbewegungen nur mit einer Schnelligkeit, die von den raschesten Bewegungen der Atomphysik noch fast tausendfach übertroffen wird.

Sternen A. G. Berl. 1366 und A. Oe. 14 318, 20 mit 494 und 491 km sec. Vgl. Newcomb-Engelmanns Populäre Astronomie, 6. Aufl., Leipzig 1921, S. 601.

Zweiter Teil.

Die Mechanik des starren Körpers.

Dreizehntes Kapitel.

Die Zusammensetzung der Kräfte.

§ 122. Der starre Körper.

Ein Körper wird als starr oder in idealem Sinne fest bezeichnet, wenn er auch unter der Einwirkung äußerer Kräfte weder seine Gestalt noch sein Volumen ändert. Die theoretische Mechanik des starren Körpers kann auf die früher besprochene allgemeine Mechanik von Massenpunktsystemen zurückgeführt werden, wenn man einem solchen Massensystem die spezielle Eigenschaft zuschreibt, daß die Entfernungen zwischen den einzelnen Massenpunkten unveränderlich sind.

Infolge dieser starren Verbindungen ist das Problem der Kräftezusammensetzung für den starren Körper wesentlich komplizierter als für einen einzelnen Massenpunkt oder für ein System freier Massenpunkte. Während für eine an einem einzelnen Massenpunkt angreifende Kraft die Darstellung durch einen parallelen und entsprechend langen Vektor vollkommen genügt, ist eine an einem ausgedehnten Körper angreifende Kraft erst dann bestimmt, wenn auch irgendein Punkt ihrer tatsächlichen Angriffsrichtung gegeben ist. Für die vektorielle Darstellung sind dann nicht mehr alle untereinander parallelen Richtungen gleichwertig, sondern nur mehr eine einzige unter ihnen vermag die Kraft darzustellen. Die Aufgabe der Kräftezusammensetzung erscheint für einen ausgedehnten Körper also erst dann gelöst, wenn, abgesehen von der vektoriellen Addition der Einzelkräfte, auch aus deren gegebenen Angriffsrichtungen die tatsächliche Angriffsrichtung der Resultierenden abgeleitet ist.

§ 123. Die Zusammensetzung komplanarer Kräfte.

Als einfacher Sonderfall möge zunächst die Zusammensetzung zweier Kräfte betrachtet werden, deren Angriffsrichtungen in

einer und derselben Ebene liegen, die also, wie man zu sagen pflegt, komplanar sind*). Es mögen etwa (Fig. 131) die Angriffspunkte der beiden Kräfte A und B sein, während sie selbst durch die gerichteten Strecken AM und BN dargestellt seien.

Um die Angriffsrichtung der Resultierenden zu finden, gehen wir von der selbstverständlichen Tatsache aus, daß man den Angriffspunkt einer Kraft in der Angriffsrichtung beliebig verlegen kann, ohne an der Wirkung etwas zu ändern, die die Kraft an dem Körper hervorbringt. Wir verlängern somit die Strecken AM und BN bis zu ihrem Schnittpunkt, der mit E bezeichnet werde. Damit erscheint das Problem auf den einfacheren Fall der Zusammensetzung zweier in demselben Punkte angreifender Kräfte zurückgeführt. Wir tragen also von E aus auf den beiden in E sich schneidenden Geraden die Strecken EM′ und EN′ auf, die den Strecken AM und BN gleich seien. Die Diagonale des Parallelogramms, dessen drei Ecken von den Punkten E, M′ und N′ gebildet werden, stellt dann die resultierende Kraft nach Betrag und Angriffsrichtung dar.

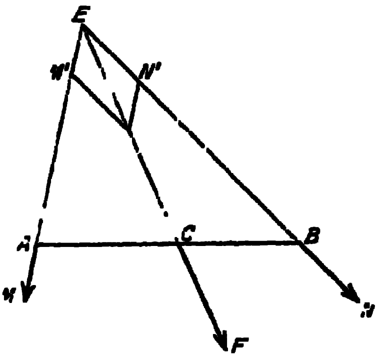
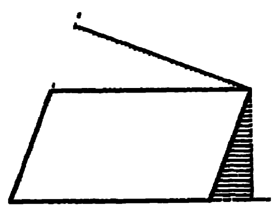


Fig. 131.

Von besonderem Interesse ist die Frage, in welchem Verhaltnis die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte, also die Strecke AB, durch die Angriffsrichtung der Resultierenden geteilt wird. Zu der Beantwortung dieser Frage benutzen wir einen leicht ableitbaren geometrischen Satz. Wir verlängern zwei zusammenstoßende Seiten eines beliebigen Parallelogramms und fällen auf diese Verlängerungen von der gegenüberliegenden Ecke des Parallelogramms zwei Perpendikel (Fig. 132). Aus der Ähnlichkeit der beiden so entstehenden (in Fig. 132 schraffierten) Dreiecke folgt, daß sich die Längen der beiden Perpendikel umgekehrt wie die Längen der Parallelogrammseiten verhalten, auf deren Verlängerungen sie gefällt werden. Es ist ohne weiteres klar, daß diese Beziehung auch dann erfüllt bleibt, wenn


Fig. 132.

*) Im allgemeinen sind die beiden Richtungen natürlich windschief.

statt der vierten Ecke des Parallelogramms ein beliebig in der Diagonale oder in deren Verlängerung gelegener Punkt gewählt wird.

Man bezeichnet nun ganz allgemein das Produkt aus einer Kraft und aus dem Perpendikel, das von einem beliebigen Punkt auf die Kraftrichtung gefällt wird, als das statische Moment der Kraft in bezug auf jenen Punkt. Die resultierende Kraftrichtung ist also dadurch ausgezeichnet, daß für jeden ihrer Punkte das statische Moment der beiden Einzelkräfte gleich groß ist; und durch dieses Postulat ist auch der Punkt (C in Fig. 131) bestimmt, in dem die resultierende Kraftrichtung die Verbindungslinie der Angriffspunkte der Einzelkräfte schneidet.

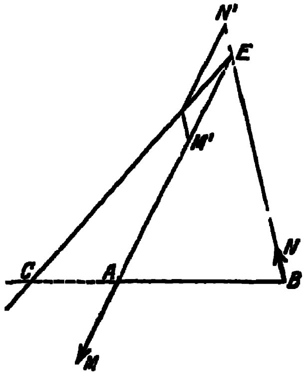


Fig. 133.

Allerdings liegt dieser Schnittpunkt nur dann (wie in Fig. 131) zwischen den beiden Angriffspunkten, wenn die von diesen aus gezogenen, die Krafte darstellenden Strecken in derselben Halbebene liegen (wofern wir uns mittels der durch die beiden Angriffspunkte gelegten Geraden die Zeichenebene in zwei Hälften zerlegt denken). Sonst liegt, wie aus Fig. 133 ersichtlich ist, der Angriffspunkt der Resultierenden außerhalb der Verbindungsstrecke in deren Verlängerung.

§ 124. Die Zusammensetzung paralleler Kräfte.

Aus den bisherigen Betrachtungen über die Kräftezusammensetzung am starren Körper ergeben sich besonders einfache Beziehungen für zwei Sonderfälle. Im ersten mögen die beiden Einzelkräfte in der Richtung ihrer Verbindungslinie wirken, im zweiten Falle aber parallel sein.

Im ersten Falle kann jeder beliebige Punkt der Verbindungsstrecke zum gemeinsamen Angriffspunkt gemacht werden. Die resultierende Kraft fällt dann ebenfalls in die Richtung der Verbindungsstrecke. Sind die beiden Einzelkräfte gleich gerichtet, so hat auch die Resultierende denselben Richtungssinn, sonst den der größeren Einzelkraft. Der Betrag der Resultierenden ist gleich der Summe oder der Differenz der Einzelkräfte, je nachdem ob die Einzelkräfte gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte heben also einander in ihrer Wirkung auf einen starren Körper auf, wofern die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte mit ihrer Angriffsrichtung zusammenfällt.

Greifen andererseits in zwei Punkten A und B zwei beliebige, jedoch **parallel** und **gleich gerichtete** Kräfte an, die durch die Strecken AM und BN dargestellt seien, so ist der Schnittpunkt C der Resultierenden und der Verbindungsstrecke (Fig. 134) nach dem Momentensatz durch die Proportion bestimmt

$$AC : CB = BN : AM = Q : P. \tag{147}$$

Der Betrag der Resultierenden ist dann der **Summe** $(P + Q)$ gleich, wenn mit P und Q die Beträge der Einzelkräfte bezeichnet werden.

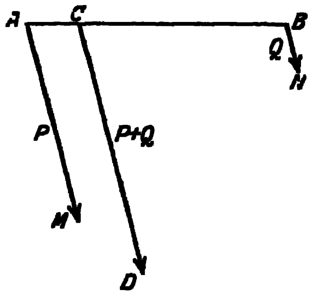


Fig. 134.

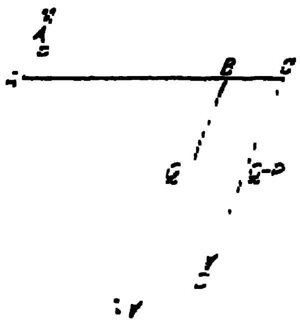


Fig. 135.

Sind hingegen die Kräfte P und Q entgegengesetzt gerichtet oder „**antiparallel**", so gilt (Fig. 135) die Proportion

$$AC : BC = Q : P; \tag{148}$$

der Betrag der Resultierenden ist jedoch in diesem Falle gleich der **Differenz**, also gleich $(Q - P)$.

§ 125. Das Kräftepaar.

Wenden wir die Proportion (148) auf den Fall **zweier gleich großer antiparalleler Kräfte** an, so rückt, weil dann AC und BC gleich groß werden müssen, der Punkt C ins Unendliche, so daß wir eine im unendlich Fernen angreifende, im Betrag jedoch verschwindende Resultierende hätten. Dieses Resultat bedeutet, daß es unmöglich ist, die vereinte Wirkung der beiden gleichen, antiparallelen Kräfte durch eine **einzige** Kraft aufzuheben, denn die Kombination jener beiden Kräfte läßt eine Zusammensetzung zu einer Resultierenden überhaupt nicht zu. In der Tat zeigt die einfache Betrachtung der betreffenden Figur (Fig. 136), daß das System der beiden Kräfte eine **drehende Bewegung** des Körpers hervor-

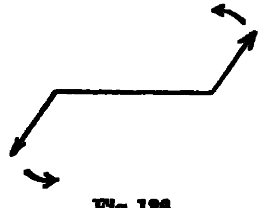


Fig. 136.

zubringen sucht, und zwar in dem Sinn der Drehung, die auf kürzestem Wege die parallelen Richtungen der beiden Kräfte zur Deckung bringt (in Fig. 136 also entgegengesetzt dem Uhrzeiger).

Ein System von zwei gleichen antiparallelen Kräften wird darum als **Drehpaar** oder **Kräftepaar** bezeichnet. Als charakteristische Größe eines solchen Paares erscheint das **Produkt aus dem Betrag einer Einzelkraft und aus dem senkrechten Abstand der beiden Kraftrichtungen.** Dieses Produkt wird als das **Moment des Kräftepaars** bezeichnet.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Summe der statischen Momente der beiden Einzelkräfte in bezug auf einen **beliebigen** Punkt dem vorhin erwähnten Produkte gleich ist. Ist nämlich S der Punkt, auf den das Moment bezogen wird (Fig. 137), und sind ST und SU die von diesem Punkte auf die beiden Kraftrichtungen gefällten Lote, so ist, wenn der Betrag der Einzelkraft mit P bezeichnet wird, das eine Moment gleich P · ST, das andere P · SU. Da aber die beiden Kräfte entgegengesetzt sind, so haben die Momente entgegengesetztes Vorzeichen, und daher ist ihre Summe gleich P · (ST — SU) oder P · TU, also gleich dem früher definierten Moment des Kräftepaars.

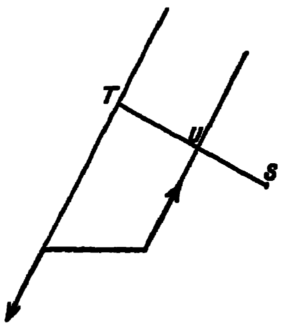


Fig. 137.

Da sich der Angriffspunkt einer jeden Kraft stets beliebig in der Kraftrichtung verlegen läßt, so kann jedes schiefwinklige Kräftepaar immer in ein **rechtwinkliges** verwandelt werden; dazu muß nur der Angriffspunkt der einen Kraft in den Fußpunkt des Lotes verlegt werden, das von dem Angriffspunkte der zweiten Kraft auf die Richtung der ersten gefällt wird. Es genügt also im folgenden die Betrachtung solcher Kräftepaare, bei denen die **Achse zu der Kräfterichtung senkrecht** ist.

§ 126. Die Verschiebung von Kräftepaaren.

Jedes **Kräftepaar** kann **graphisch durch einen Vektor dargestellt** werden, dessen Länge dem Momente des Kräftepaars gleich gemacht und der **senkrecht zu der Ebene des Kräftepaars** errichtet wird. Der Richtungssinn wird dabei in konventioneller Weise so festgesetzt, daß von der Spitze des Vektors aus gesehen, die Drehung, die das Kräftepaar hervorzubringen sucht, entgegen dem Uhrzeiger verläuft (Fig. 138). Es läßt sich leicht beweisen, daß auf die Wirkung eines Kräftepaars alle an dem Kräfte-

paar vorgenommenen Änderungen ohne Einfluß bleiben, bei denen der **Momentenvektor** ungeändert bleibt.

Zunächst einmal kann gezeigt werden, daß man ein jedes Kräftepaar, ohne an seiner Wirkung etwas zu ändern, **um seinen Mittelpunkt drehen** kann. Es seien etwa A und B die Angriffspunkte der beiden Einzelkräfte, die durch die Strecken Ax und By dargestellt seien (Fig. 139). Um den Halbierungspunkt der Achse, um den Punkt M, werde die Achse in die Lage A'B' gedreht. In den

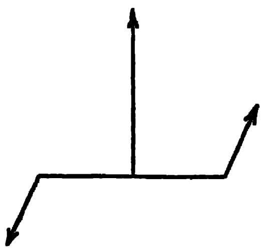


Fig. 138.

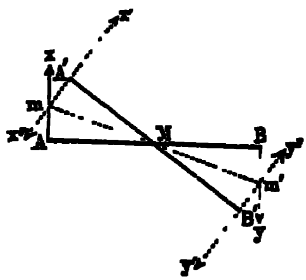


Fig. 139.

Punkten A' und B' denken wir uns nun senkrecht zu A'B' je zwei entgegengesetzte Kräfte angreifend, deren Betrag dem des Kräftepaars gleich sei. Diese vier Kräfte seien dargestellt durch die Strecken A'x', A'x'', B'y' und B'y''. Da von diesen vier Kräften je zwei einander wechselseitig aufheben, so ist das System der nunmehr vorhandenen sechs Kräfte dem ursprünglichen Kräftepaar äquivalent.

Die sechs Kräfte können wir aber auch derart zusammensetzen, daß wir einerseits die Resultierende aus Ax und A'x'' bilden, andererseits die aus By und B'y''. Die erste Resultierende fällt in die Richtung der Geraden Mm (wobei die Dreiecke MAm und MA'm natürlich wegen der Gemeinsamkeit einer Seite, der Gleichheit einer zweiten Seite und eines rechten Winkels kongruent sind, so daß Mm zugleich die Symmetrale des Winkels AMA' darstellt). Die zweite Resultierende fällt in die Richtung Mm' (die wiederum die Symmetrale des Winkels BMB' bildet). Der Angriffspunkt der ersten Resultierenden ist der Schnittpunkt m, der Angriffspunkt der zweiten Resultierenden der Schnittpunkt m'. Die beiden Resultierenden haben also entgegengesetzte Richtung, und beide fallen in die Richtung der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte. Da sie auch im Betrag gleich groß sind, heben sie einander in ihren Wirkungen auf.

Das System der sechs Kräfte ist demnach äquivalent dem Kräftepaar A′x′, B′y′. Da andererseits das System der sechs Kräfte aber auch, wie vorhin gezeigt wurde, dem ursprünglichen Kräftepaar äquivalent ist, so besteht kein Unterschied in den Wirkungen der Kräftepaare Ax, By und A′x′, B′y′. Damit ist es bewiesen, daß ein Kräftepaar ohne Änderung seiner Wirkung um seinen Mittelpunkt gedreht werden kann.

Andererseits läßt sich auch leicht zeigen, daß die Achse eines Kräftepaares beliebig parallel zu sich verschoben werden kann. Es sei in Fig. 140 A′B′ eine beliebige, zu der ursprünglichen parallele Lage der Achse. In den Punkten A′ und B′ mögen nun je zwei einander entgegengesetzte Kräfte angreifen, die den Kräften des ursprünglichen Kräftepaares parallel und gleich seien. Die vier derart neu hinzukommenden Kräfte seien durch die Strecken A′x′, A′x″, B′y′ und B′y″ dargestellt. Da sich unter ihnen je zwei wechselseitig aufheben, ist wiederum das System der sechs Kräfte dem ursprünglichen Kräftepaar äquivalent.

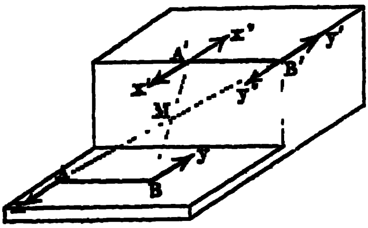


Fig. 140.

Die sechs Kräfte lassen sich aber auch auf andere Art zusammensetzen. Wir verbinden hierzu durch Hilfslinien A mit B′ und B mit A′; die beiden Linien schneiden einander in einem Punkte M, der zugleich für beide Linien die Mitte darstellt. Die Kombination der durch die Strecken Ax und B′y″ dargestellten Kräfte gibt eine horizontale Komponente, ebenso die Kombination der Kräfte By und A′x″. Die Resultierenden der beiden Kombinationen sind aber gleich groß und einander entgegengesetzt, so daß sie sich wechselseitig aufheben. Das System der sechs Kräfte ist also einerseits dem Kräftepaar A′x′, B′y′ äquivalent, andererseits nach dem vorhin Gesagten dem ursprünglichen Kräftepaar Ax, By. An der Wirkung des Kräftepaares wird also nichts geändert, wenn es in eine parallele Ebene übertragen wird.

Durch Superposition einer Übertragung in eine parallele Ebene und einer Drehung um den Mittelpunkt läßt sich aber jede beliebige Verschiebung des Kräftepaars darstellen, bei der Kraftbetrag, Achsenlänge und Richtung des Momentenvektors ungeändert bleiben. Es ist indessen gar nicht nötig, daß Kraftbetrag und Achsenlänge konstant bleiben, wofern nur das Produkt aus beiden ungeändert bleibt. Um dies zu beweisen, verlängern

wir die Achse AB eines Kräftepaars auf die beliebige Länge AC (Fig. 141). In dem Punkte C denken wir uns sodann zwei zu der Achse senkrechte Kräfte angreifend, deren Betrag sich zu dem der beiden ursprünglichen Kräfte so verhalte wie AB zu BC. Diese beiden Kräfte seien durch die Strecken Cz und Cz″ dargestellt. Zwei ihnen gleiche und parallele Kräfte mögen überdies im Punkte B angebracht werden (dargestellt durch yz‴ und Bz′). Wir erhalten so wiederum ein System von sechs Kräften, das dem ursprünglichen Kräftepaar wieder äquivalent ist, weil sich von den neu hinzugefügten vier Kräften je zwei wechselseitig aufheben.

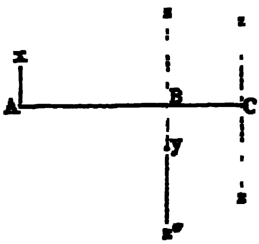


Fig. 141.

Nun ergeben die Kräfte By und yz‴ die Resultierende Bz‴, die nach den in einem früheren Abschnitt abgeleiteten Regeln eben durch die Kräfte Ax und Cz″ aufgehoben wird. Denn die Zusammensetzung der Kräfte Ax und Cz″ ergibt eine Resultierende, die im Punkte B angreift und der Kraft Bz‴ entgegengesetzt gleich ist. Da also das System der sechs Kräfte einerseits dem ursprünglichen Kräftepaar Ax, By äquivalent ist, andererseits aber dem Kräftepaar Bz′, Cz, so muß auch die Wirkung des ursprünglichen Kräftepaars ungeändert bleiben, wenn es in das Kräftepaar Bz′, Cz von verschiedenem Kraftbetrag und verschiedener Achsenlänge, jedoch von gleichem Moment verwandelt wird.

§ 127. Die Verlegung des Angriffspunktes einer Einzelkraft.

Es sei S der Angriffspunkt einer beliebigen Kraft, die mit I bezeichnet werde, und S′ ein anderer Punkt, der außerhalb der durch S gehenden Kraftrichtung liege (Fig. 142). Dann können wir, ohne daß an der Wirkung auf den Körper etwas dadurch geändert wird, in dem Punkte S′ zwei weitere, einander entgegengesetzte Kräfte anbringen, II und III, die der Einzelkraft gleich und parallel seien, wobei II gleich gerichtet, III hingegen entgegengesetzt gerichtet sei. Das System der drei Kräfte, das sich aus dem Kräftepaar I, III und der Einzelkraft II zusammensetzt, ist demnach der ursprünglichen Einzelkraft äquivalent.

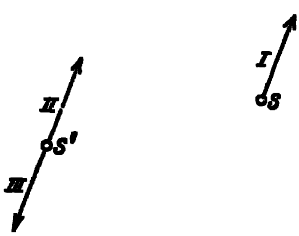


Fig. 142.

Der Angriffspunkt einer Einzelkraft kann also beliebig

verlegt werden, wofern man überdies zu der Einzelkraft noch ein Kräftepaar hinzufügt, dessen Moment gleich ist dem Produkt aus der Kraft und dem senkrechten Abstand des neuen Angriffspunktes von der ursprünglichen Kraftrichtung; die Ebene dieses Kräftepaares muß mit derjenigen zusammenfallen, die durch die beiden Angriffspunkte und die ursprüngliche Kraftrichtung festgelegt ist.

§ 128. Die allgemeine Lösung des Problems der Kräftezusammensetzung.

An einem starren Körper mögen beliebige Einzelkräfte in ganz beliebigen Punkten und überdies beliebige Kräftepaare angreifen. Wir können dann die Angriffspunkte aller Einzelkräfte in einen und denselben irgendwie gewählten Punkt verlegen, wofern wir nur gemäß der in dem vorhergehenden Abschnitt angegebenen Regel noch die entsprechenden Kräftepaare hinzufügen. Die in einem und demselben Punkte angreifenden Kräfte lassen sich dann durch vektorielle Addition zu einer Resultierenden vereinigen und ebenso andererseits alle Kräftepaare, indem das resultierende Kräftepaar durch den Vektor bestimmt ist, der sich durch geometrische Addition der die einzelnen Kräftepaare repräsentierenden Vektoren ergibt.

Derart lassen sich stets alle an einem starren Körper angreifenden Kräfte zu einer einzigen Kraft und einem einzigen Kräftepaar vereinigen. Wie sich durch geometrische Betrachtungen zeigen läßt, kann stets eine Gerade derart bestimmt werden, daß, wenn man in einen ihrer Punkte die zusammenzusetzenden Kräfte verlegt, die Ebene des resultierenden Kräftepaars der resultierenden Kraft parallel ist. In diesem Falle stellt auch das Moment des resultierenden Kräftepaars einen Minimalwert dar.

Aus geometrischen Überlegungen folgt, daß sich sämtliche an einem starren Körper befindlichen Kräfte nur dann im Gleichgewicht befinden, wenn sowohl die resultierende Kraft als auch das Moment des resultierenden Kräftepaars in bezug auf einen beliebigen Punkt verschwindet.

§ 129. Der Schwerpunkt.

Zwei parallele und gleich gerichtete Kräfte ergeben, wie schon in einem früheren Abschnitt (§ 124) dargelegt wurde, eine parallele und gleich gerichtete Resultierende, deren Angriffspunkt den Abstand der Angriffspunkte der beiden Einzelkräfte im umgekehrten Verhältnis dieser Kräfte teilt, und deren Betrag gleich ist der Summe der Teilbeträge.

Betrachten wir daher zwei schwere, miteinander starr verbundene Körper, auf die das eigene Gewicht wirkt, so ergeben die Gewichte eine Resultierende, die wegen der Proportionalität von Gewicht und Masse in dem Massenmittelpunkt*) angreift und zwar in einer Stärke, die der Summe der Gewichte gleich ist. Dieser Satz läßt sich natürlich auf ein System von beliebig vielen Massenpunkten erweitern, und indem wir uns einen ausgedehnten, starren und schweren Körper aus ebenfalls schweren und starr verbundenen Massenpunkten zusammengesetzt denken, finden wir als Resultierende aus allen Schwerkräften eine in dem Massenmittelpunkt angreifende Vertikalkraft, die dem Gewicht des Körpers gleich ist. Aus diesem Grunde wird der Massenmittelpunkt auch als Schwerpunkt bezeichnet.

§ 130. Beispiele für die Lage des Schwerpunkts.

Die Ermittlung des Schwerpunkts homogener Körper von regelmäßig geometrischer Gestalt ist eine rein geometrische Aufgabe, die leicht mittels der Methoden der Infinitesimalrechnung gelöst werden kann.

Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt in ihrer Mitte. Den Schwerpunkt eines Dreiecks findet man, indem man von zwei Ecken nach den gegenüberliegenden Seitenmitten Gerade (die sogenannten Transversalen) zieht. Der Schnittpunkt bestimmt den Schwerpunkt (Fig. 143), durch den natürlich auch die dritte Mittel-

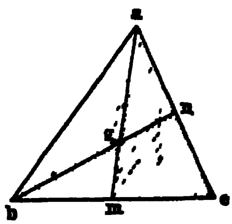


Fig. 143.
Schwerpunkt eines Dreiecks.

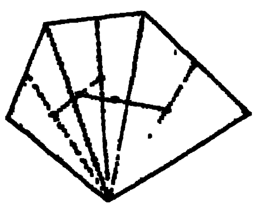


Fig. 144.
Schwerpunkt eines Polygons.

linie geht. Um den Schwerpunkt eines Polygons zu finden, zerlegt man es in Dreiecke (Fig. 144) und bestimmt zunächst deren Schwerpunkte. In jedem dieser Punkte hat man sich nun eine dem Flächeninhalt des Dreiecks proportionale Masse angebracht zu denken und sodann für diese den Massenmittelpunkt zu bestimmen. Die wohl ohne weiteres verständliche Fig. 145 gibt die derart erfolgte Konstruktion des Schwerpunkts eines Vierecks wieder.

*) Vgl. § 38.

Der Schwerpunkt einer Halbkreislinie ist von dem Kreiszentrum um eine Strecke entfernt, die sich durch Division des Durchmessers durch π ergibt. Allgemein gilt der Satz, daß sich der Abstand, den der Schwerpunkt eines Kreisbogens vom Kreiszentrum hat, ebenso zum Kreisradius verhält wie die Sehne zum Kreisbogen.

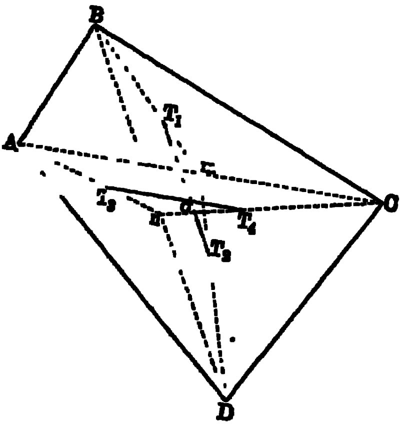


Fig. 145. Schwerpunkt eines Vierecks.

Um den Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide zu berechnen, zieht man etwa von der Spitze (g in Fig. 146) und von einer Ecke (a) Gerade nach den Schwerpunkten (h und k) der gegenüberliegenden Dreiecke. Der Schnittpunkt der beiden Geraden (g″) stellt den Schwerpunkt der Pyramide dar. Seine Höhe über der Grundfläche (g″h) beträgt, wie leicht bewiesen werden kann, den vierten Teil der Höhe der Pyramide (gh).

Ein ähnlicher Satz gilt auch für einen kreisförmigen Kegel, dessen Schwerpunkt (Fig. 147) ebenfalls in einer Höhe von einem Viertel der Gesamthöhe über der Basis liegt.

Bei einem Prisma liegt der Schwerpunkt in der Mitte der Verbindungslinien der Schwerpunkte der beiden Grundflächen, ebenso natürlich bei einem Zylinder. Der Schwerpunkt einer homogenen Kugel oder gleichmäßig dicken Kugelschale fällt in den Kugelmittelpunkt. Die Anführung dieser wenigen Beispiele mag wohl

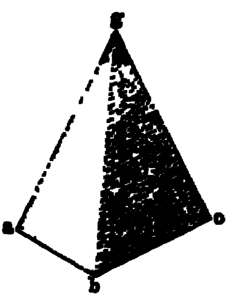


Fig. 146.
Schwerpunkt einer Pyramide.


Fig. 147.
Schwerpunkt eines Kegels.

genügen, zumal diese Probleme weit weniger von physikalischem als von geometrischem Interesse sind.

§ 131. Die experimentelle Ermittlung des Schwerpunkts.

Da der Angriffspunkt einer Kraft in deren Angriffsrichtung beliebig verschoben werden kann, so befindet sich ein schwerer Körper immer dann im Gleichgewicht, wenn in der durch den Schwerpunkt gehenden Vertikalrichtung ein zu dem Körper gehöriger Punkt fixiert ist, sei es durch Aufhängung, sei es durch entsprechende Stützung. Diese Tatsache kann zu einer experimentellen Bestimmung der Lage des Schwerpunktes benutzt werden, was namentlich bei scheibenförmigen Körpern verhältnismäßig einfach ist.

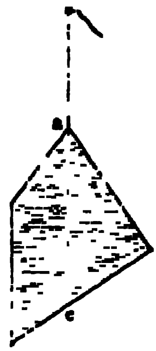


Fig. 148.

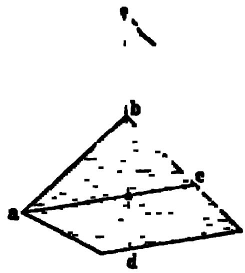


Fig 149.

Man hängt in einem solchen Falle beispielsweise den in Fig. 148 dargestellten scheibenförmigen Körper zunächst im Punkte a auf und bestimmt den Punkt c, bei dem die durch a gehende Vertikale aus dem Körper austritt. Dann hängt man den Körper in b auf (Fig. 149) und bestimmt wiederum die Austrittsstelle der Vertikalen bei d. Der Schnittpunkt der Strecken ac und bd stellt den Schwerpunkt dar.

Ein anderes Verfahren ist durch Fig. 150 dargestellt. Der Körper wird auf eine scharfe Kante gelegt und durch Probieren eine Gleichgewichtslage ermittelt. Ist eine solche gefunden, so wird entlang der Kante eine Linie auf dem scheibenförmigen Körper gezogen (ab). Dasselbe wird bei einer zweiten festgestellten Gleichgewichtslage getan (cd), und der Schnittpunkt beider Linien ergibt natürlich wieder den Schwerpunkt (o) der Scheibe.

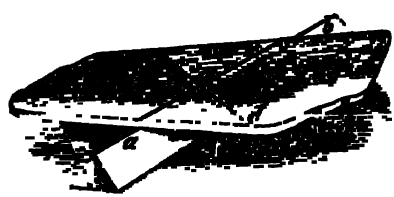


Fig. 150.

§ 132. Die Arten des Gleichgewichts.

Bei dem Gleichgewicht eines festen Körpers können wir drei verschiedene Fälle nach der wechselseitigen Lage des Schwerpunktes und des Aufhänge- oder Stützpunktes unterscheiden.

Im ersten Falle möge der Schwerpunkt selbst fixiert sein. In diesem Falle (Fig. 151), in dem etwa eine Drehungsachse (c) durch den Schwerpunkt (s) hindurchgehe, kann man den Körper beliebig

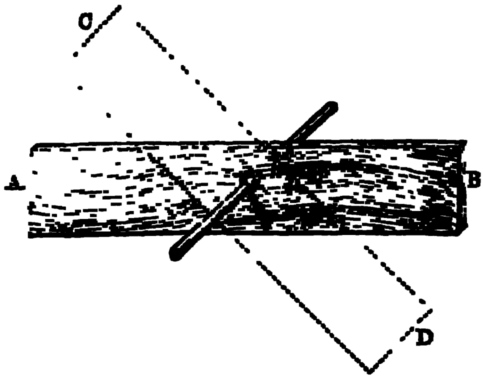


Fig. 151. Das indifferente Gleichgewicht.

drehen, ohne das Gleichgewicht damit zu stören. Es besteht ebensowohl für die Lage AB wie für die Lage CD. Ein Gleichgewicht solcher Art wird als indifferentes Gleichgewicht bezeichnet.

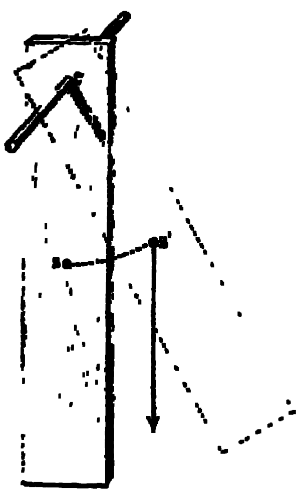


Fig. 152.
Das stabile Gleichgewicht.

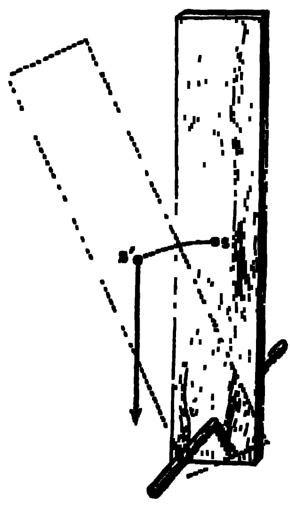


Fig. 153.
Das labile Gleichgewicht.

Im zweiten Falle (Fig. 152) befinde sich der Schwerpunkt vertikal unterhalb der Drehungsachse. Wir denken uns den Körper in eine andere Lage gedreht, bei der der Schwerpunkt an die Stelle s'

komme. Die Schwerkraft erzeugt dann in dieser Lage ein Drehmoment, das den Körper wieder in die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückzieht. Ein derartiges Gleichgewicht wird stabil oder fest genannt.

Eine dritte Möglichkeit ist die, daß bei der Aufhängung der Schwerpunkt oberhalb der Drehungsachse liegt (Fig. 153). Wird der Körper aus dieser Gleichgewichtslage gedreht, so daß der Schwerpunkt in die tiefere Lage s' kommt, so dreht die Schwerkraft den Körper nun solange, bis der Schwerpunkt wiederum in dieselbe Vertikale mit der Drehachse, diesmal aber unterhalb der Drehachse kommt. Ein derartiges Gleichgewicht, bei dem nach einmal erfolgter Störung eine spontane Rückkehr nicht mehr möglich ist, wird als labil oder unsicher bezeichnet.

Dieselbe Unterscheidung der drei Gleichgewichtsarten ist natürlich auch dann möglich, wenn das Gleichgewicht durch Ruhen auf einer Unterlage herbeigeführt ist. Eine Kugel ist auf einer horizontalen Ebene im indifferenten, an der tiefsten Stelle einer Aushöhlung im stabilen, an der höchsten Stelle einer Erhebung im labilen Gleichgewicht.

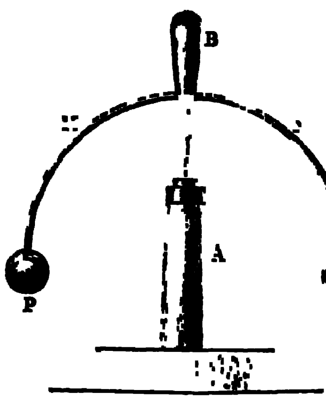


Fig. 154.

Ein bemerkenswerter Fall stabilen Gleichgewichtes ist in Fig. 154 dargestellt. Ein Stativ (A) trägt oben ein flach ausgehohltes Metallstück, auf das nun ein in eine feine Stahlspitze mündendes Holzstück B gesetzt wird; durch dieses ist ein gebogener Draht (MN) gezogen, der an seinen beiden Enden je eine schwere Bleikugel (P) trägt. Der Schwerpunkt des aus dem Holzstück (B), dem Drahtbogen und den beiden Bleikugeln zusammengesetzten Gebildes liegt tiefer als die Stahlspitze, so daß das Gleichgewicht stabil ist.

Ein Ellipsoid befindet sich im stabilen oder labilen Gleichgewicht, je nachdem ob seine große oder seine kleine Achse horizontal gestellt ist. Ein schiefer Zylinder, der mit horizontaler Basis auf einer wagrechten Ebene ruht (Fig. 155), befindet sich nur dann im Gleichgewicht, wenn die durch den Schwerpunkt gelegte Vertikale noch durch die Basis hindurchgeht. Dies ist also beispielsweise der Fall, wenn der Zylinder die in Fig. 155 durch

Schraffierung angedeutete Größe hat, hingegen nicht, wenn der Zylinder von der durch die punktierten Linien bezeichneten Größe ist.

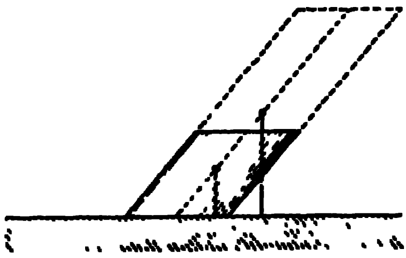


Fig. 155.
Gleichgewicht eines schiefen Zylinders.

Bei einem beladenen Wagen kann ebenfalls nur dann Gleichgewicht bestehen, wenn die durch den Schwerpunkt gelegte Vertikale den Boden zwischen den Rädern erreicht. Während also in dem Falle, der in Fig. 156 rechts wiedergegeben ist, Gleichgewicht vorhanden ist, muß in dem links dargestellten Fall der Wagen umkippen. Aus demselben Grunde muß ein Mensch, der eine Last trägt, den Oberkörper vorbeugen, damit die durch den Schwerpunkt gehende Vertikale den Boden zwischen den beiden Füßen erreiche. Ein Mann,

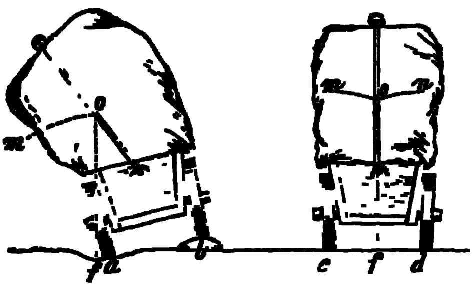


Fig. 156. Gleichgewicht eines beladenen Wagens.

der eine Last in der linken Hand trägt, muß den Oberkörper nach rechts neigen, um nicht das Gleichgewicht zu verlieren usw.

Bei inhomogenen Körpern, die aus Teilen von verschiedener Dichte zusammengesetzt sind, kann natürlich der tatsächliche Schwerpunkt an ganz anderer Stelle als der sogenannte „Volumschwerpunkt" liegen, also ganz anders, als dies jemand vermuten würde, der nur die geometrische Gestalt ins Auge faßt und von der Inhomogenität nichts weiß. Hierauf beruhen verschiedene bekannte Spielzeuge, wie z. B. das Stehauf-Männchen oder der berganlaufende Zylinder (Fig. 157).

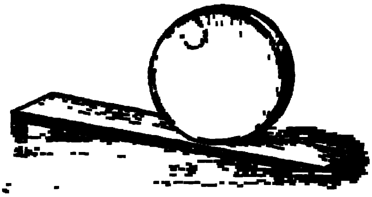


Fig. 157. Berganlaufender Zylinder.

§ 133. Die Standfestigkeit.

Die Stabilität eines Gleichgewichtes kann quantitativ durch die Kraft bestimmt werden, die erforderlich ist, um den Körper unter gegebenen Bedingungen aus seiner gegebenen Lage in ein labiles Gleichgewicht zu bringen. Diese Kraft wird als Standfestigkeit bezeichnet. Betrachten wir z. B. ein rechtwinkliges Parallelepiped auf horizontaler Grundlage (Fig. 158), so muß hierzu der Körper so weit um die Kante a gedreht werden, bis der Schwerpunkt S in die Lage S′ gelangt ist, die genau vertikal oberhalb der Kante a liegt. Ist der Körper über diese Stelle hinaus gedreht, so fällt er von selbst um. Wir wollen nun die Standfestigkeit für den besonderen Fall berechnen, daß die umwerfende Kraft horizontal gerichtet ist.

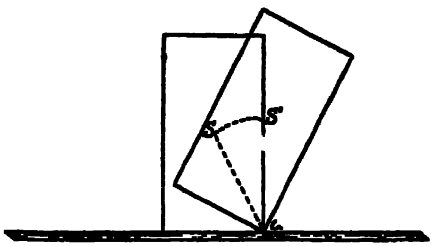


Fig. 158.

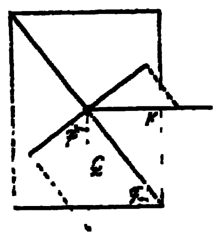


Fig. 159.

Standfestigkeit.

Ist φ der Winkel, den die durch den Schwerpunkt gelegte Diagonale mit der Horizontalen einschließt (Fig. 159), ist Q das Gewicht des umzuwerfenden Körpers und K die umkippende horizontale Kraft, so folgt aus Fig. 159 unmittelbar die Beziehung:

$$K \sin \varphi = Q \cos \varphi . \qquad 149)$$

Nennen wir die halbe Basis des umzuwerfenden Klotzes b und die Höhe seines Schwerpunktes über der Basis h, so ist aber andererseits

$$h = b \operatorname{tg} \varphi , \qquad 150)$$

und somit wird die die Standfestigkeit messende Kraft

$$K = Q \frac{b}{h} . \qquad (151)$$

Es ist also in dem betrachteten Fall die Standfestigkeit der Breite der Grundfläche, sowie dem Gewicht direkt, hingegen der Erhebung des Schwerpunktes über der Grundfläche umgekehrt proportional.

§ 134. Die experimentelle Bestätigung des Stabilitätsgesetzes.

Um das durch die Gl. 151 ausgedrückte Stabilitätsgesetz experimentell zu prüfen, bedient man sich zweckmäßig eines keilförmigen Klotzes und einer Vorrichtung, wie sie durch Fig. 160 dargestellt ist. Man ermittelt durch Konstruktion der Transversallinien der vorderen Dreiecksfläche deren Schwerpunkt und zieht dann um den Klotz eine der Basis parallele, horizontale Linie um den Keil. Der Mittelpunkt der Strecke, die auf die vordere Fläche kommt, sei E und der Mittelpunkt der Strecke, die auf die seitliche Fläche kommt, sei F. Bei F wird ein Haken eingeschlagen, von dem über eine Rolle eine Schnur geht, die an ihrem Ende eine Wagschale trägt; auf diese werden die Gewichte gelegt, die die Stand-

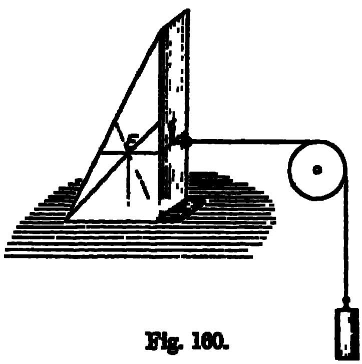


Fig. 160.

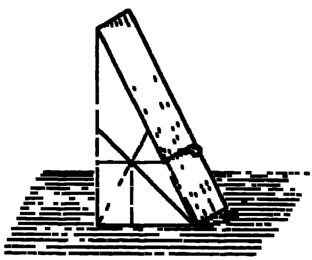


Fig. 161.

Experimentelle Prüfung des Stabilitätsgesetzes.

festigkeit messen sollen. Mit der Kante, um die der Körper geworfen werden soll, wird er gegen eine Schiene gelegt, die auf dem Tische befestigt ist.

Daß die Standfestigkeit dem Gewichte proportional ist, läßt sich zunächst leicht zeigen, indem man den Klotz in zwei Exemplaren von gleicher Größe und Gestalt herstellt, von denen jedoch eines aus schwerem Holz, das andere aus leichtem Holz verfertigt ist. Die auf die Wage zu legenden Gewichte verhalten sich dann wie die spezifischen Gewichte der beiden Holzarten.

Daß die Standfestigkeit der Breite der Basis proportional ist, zeigt man, indem man das eine Mal den Klotz in der Stellung, die in Fig. 160 angegeben ist, umwirft, das andere Mal ihn aber in der Stellung, die in Fig. 161 angedeutet ist, zum Umkippen um die rechte Kante bringt. Im ersten Falle ist die Größe b der Gl. 151 durch eine halb so große Strecke gegeben wie im zweiten Falle, und

in der Tat müssen, wie der Versuch zeigt, im zweiten Falle doppelt soviel Gewichte auf die Wagschale aufgelegt werden wie im ersten Fall.

Schließlich kann man auch, wenn man zwei gleich gestaltete Klötze aus leichtem und schwerem Holz benutzt, beiden dadurch gleiches Gewicht geben, daß man in den leichteren am Boden ein Stück Blei einfügt. Der Schwerpunkt des aus leichterem Holz verfertigten Klotzes liegt dann tiefer als bei dem anderen Klotz, obwohl Gewicht und Basis in beiden Fällen gleich sind. Der Versuch bestätigt es dann, daß der aus dem leichteren Holz verfertigte Klotz wegen der tieferen Lage des Schwerpunkts eine größere Kraft zum Umwerfen erfordert, wofern man in beiden Fällen die Kraft in der Hohe des Schwerpunkts angreifen läßt*).

Vierzehntes Kapitel.

Die Maschinen.

§ 135. Der Begriff der Maschine.

Unter einer Maschine im einfacheren Sinne dieses Wortes versteht man eine Vorrichtung, die es gestattet, eine einem bestimmten Vorhaben hinderliche Kraft durch Anwendung einer anderen Kraft von geringerer Größe oder anderer als einer unmittelbar entgegengesetzten Richtung zu überwinden. Die Maschine kann also einerseits richtungändernd wirken, andererseits vermindert sie das Verhältnis der beiden Kräfte zugunsten der angreifenden. Der Wert, den dieses Verhältnis im Falle des Gleichgewichtes hat, wird als das Übersetzungsverhältnis der die Kraft übertragenden Maschine bezeichnet.

Die zu überwindende Kraft wird gewöhnlich kurz die Last und die angreifende Kraft die Kraft schlechthin genannt. Die Bezeichnung als Last erklärt sich daraus, daß in dem ursprünglich wichtigsten Fall die zu uberwindende Kraft das Gewicht eines zu hebenden Körpers ist. Ist das Übersetzungsverhältnis r_1 und die Last Q, so muß die Kraft mindestens gleich r_1 Q sein, um die Last heben zu können; andererseits arbeitet die Maschine am zweckmäßigsten, wenn die Kraft den Betrag r_1 Q eben nur um so viel übersteigt, als zur Überwindung der Bewegungshindernisse erforderlich ist. Als ideal wird eine Maschine bezeichnet, deren

*) Bei dem aus leichterem Holz bestehenden Klotz muß daher die umwerfende Kraft tiefer angreifen.

Bestandteile entweder vollkommen starr oder vollkommen biegsam angenommen werden und die von Bewegungshindernissen, wie Reibung, Seilsteifigkeit u. dgl. völlig frei gedacht wird.

§ 136. Die feste Rolle.

Eine nur die Richtung ändernde Maschine wird durch die **feste Rolle** dargestellt. Sie besteht aus einer kreisrunden Scheibe, die längs ihres Umfanges zur Aufnahme eines Seiles ausgehöhlt und um eine durch ihr Zentrum gehende, zur Kreisebene normale Achse drehbar ist. Gewöhnlich ist die Achse an einer Schere befestigt, die bei der festen Rolle von einem Balken oder einer Wand getragen wird (Fig. 162).



Fig. 162.
Die feste Rolle.

An einer festen Rolle kann natürlich nur dann **Gleichgewicht** bestehen, wenn die von Kraft und Last hervorgerufenen **Drehmomente entgegengesetzt gleich** sind. Das ist aber wegen der Kreisform nur dann möglich, **wenn die Kraft ebensogroß ist wie die Last.**

§ 137. Die lose Rolle.

Wird die Last an der Gabel einer Rolle angebracht und das um die Rolle gelegte Seil an seinem einen Ende befestigt, so erhält man in der Form einer sogenannten **losen Rolle** eine Maschine, die nicht nur die Richtung der Kraft, sondern auch deren Betrag ändert. Die Last P verteilt sich dann auf beide Teile des Seiles (a und b in Fig. 163), und daher erscheinen diese beiden Teile des Seiles nur mit der **halben Kraft** gespannt. Die Spannung des Teiles a wird durch die Befestigung des Seiles (im Punkte n) aufgehoben, und daher besteht Gleichgewicht, wenn das Seil b mit der Kraft P/2 nach aufwärts gezogen wird. Um die Richtung dieses Zuges zweckmäßig zu ändern, führt man das Seil b noch über eine feste Rolle (A in Fig. 163) und läßt an dem Teil des Seiles, der auf der anderen Seite der festen Rolle liegt (c), die Kraft p angreifen, die also gleich P/2 ist.

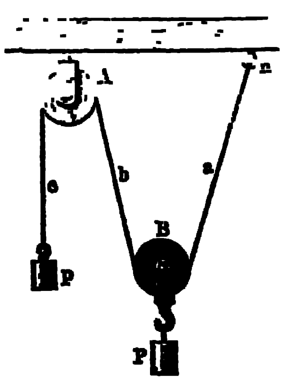


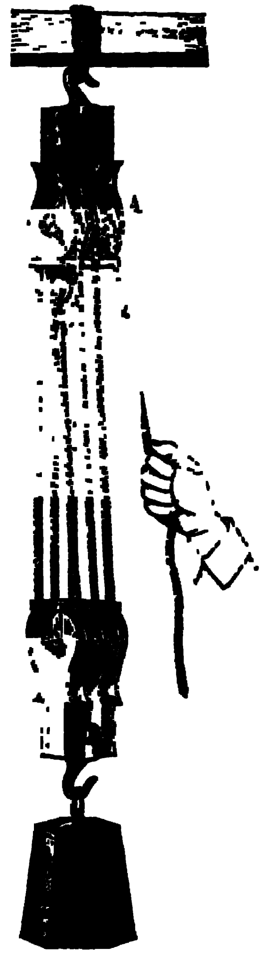
Fig. 163.
Die lose Rolle.

Daß das Übersetzungsverhältnis der losen Rolle $^1/_2$ beträgt, folgt auch unmittelbar aus dem Prinzip der **virtuellen Verrückungen** (§ 39). Damit nämlich die die Last P tragende Schere

um 1 cm gehoben werde, muß das Gewicht p um 2 cm sinken. Daraus folgt wiederum, daß p gleich 1/2 P ist.

Genau gilt diese Beziehung allerdings nur dann, wenn die **Schnüre parallel** sind. Sonst ist, wenn die Seilteile a und b miteinander einen Winkel γ einschließen, die Seilspannung und somit auch p gleich $P/[2 \cos(\gamma/2)]$. Je hoher die Last gehoben wird, desto großer wird der Winkel γ und desto größer somit das Übersetzungsverhältnis.

In Umkehrung des Prinzips der virtuellen Verrückungen erkennen wir übrigens auch aus der Gleichgewichtsbedingung an der losen Rolle das allgemein gültige Gesetz, daß durch eine Maschine zwar die zur Arbeitsleistung erforderliche **Kraft** vermindert, gleichwohl aber nie **Arbeit gespart** werden kann. Denn die Arbeit ist ja durch das Produkt aus Kraft und Weg bestimmt. Ist nun aber auch (bei parallelen Schnüren) die Kraft halb so groß wie die Last, so muß sie dafür auf einer Strecke aufgewendet werden, die doppelt so groß ist wie diejenige, um die die Last gehoben wird.


Fig. 164. Flaschenzug.

§ 138. Der Flaschenzug.

Eine Vorrichtung, die mehrere bewegliche und mehrere lose Rollen miteinander vereinigt, wird als **Flaschenzug** bezeichnet. Ein solcher besteht gewöhnlich aus zwei „Flaschen“, einer beweglichen und einer losen, in deren jeder die Rollen entweder in verschiedener Größe übereinander oder in gleicher Größe hintereinander (Fig. 164) oder auch in gleicher Größe nebeneinander angeordnet sind.

Enthält jede der beiden Flaschen n Rollen, so gehen zwischen den beiden Flaschen (vgl. Fig. 165) 2n Schnüre, und daher muß, damit die Last um 1 cm gehoben werde, das freie Seilende um 2n cm herabgezogen werden. Aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen folgt ohne weiteres, daß sich im Gleichgewichtsfall die Kraft zur Last wie 1 : 2n verhält.

§ 139. Der Potenzrollenzug.

Eine Kombination von mehreren losen und einer festen Rolle wird ein **Potenzrollenzug** genannt (Fig. 166)*). Wird das freie Seilende um n cm herabgezogen, so hebt sich die oberste der losen Rollen um $n/2$, die nächste um $n/4$, die unterste um $n/8$ cm. An dem aus drei losen und einer beweglichen Rolle zusammengesetzten

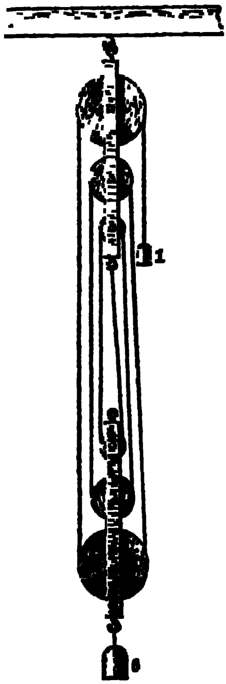


Fig. 165. Flaschenzug.

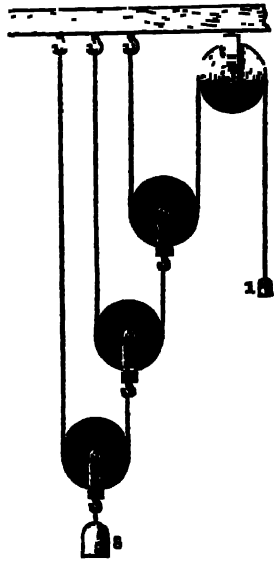


Fig. 166. Potenzrollenzug.

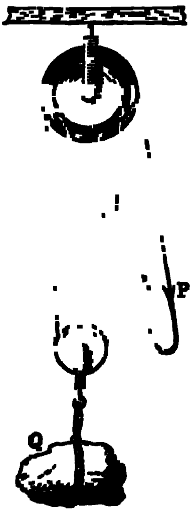


Fig. 167. Differentialrolle.

Zug herrscht also Gleichgewicht, wenn die Kraft dem achten Teil der Last gleich ist. Sind n lose Rollen vorhanden, so ist das Übersetzungsverhältnis $1:2^n$. Hieraus erklärt sich auch der Name „Potenz"-Rollenzug.

§ 140. Die Differentialrolle.

Eine sehr große Übersetzung läßt sich bei der **Differentialrolle** erzielen (Fig. 167). Sie besteht aus zwei Rollen von wenig verschiedenem Durchmesser, die (allenfalls aus einem Stück gedreht) um dieselbe Achse drehbar sind und die mit einer losen Rolle mittels eines um alle drei Rollen geschlungenen **Seiles ohne Ende** verbunden sind. Statt eines Seiles wird häufig auch eine in Vorsprünge der Rollen eingreifende Kette verwendet, um jedes Gleiten zu vermeiden.

Die Kraft greife an der Stelle P des Seiles an; die Radien der

*) Fälschlich auch ebenfalls als Flaschenzug bezeichnet.

beiden Rollen seien R und r. Wird nun bei P das Seil (oder die Kette) um x cm herabgezogen, so wird die größere Rolle ebenfalls um eine Bogenlänge x gedreht, die kleinere Rolle somit um die Bogenlänge x r/R. Die gesamte Lange der zwischen der festen Doppelrolle und der losen Rolle befindlichen Seilteile erfährt also eine Verkürzung um die Länge x (1—r/R). Halb so groß ist die Strecke, um die die Last gehoben wird, und somit ergibt sich für das Übersetzungsverhältnis der Differentialrolle der Wert

$$r_i = 1 : \frac{2R}{R - r}. \qquad (152)$$

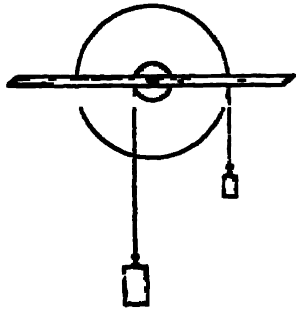


Fig. 168. Wellrad.

Die Übersetzung ist demnach um so größer, je geringer die Differenz der beiden Halbmesser ist, woraus sich die Bezeichnung „Differential"-Rolle erklärt.

§ 141. Das Wellrad.

Eine Kombination von zwei miteinander fest verbundenen Rollen von verschiedenen Radien wird als Wellrad bezeichnet, wenn um jede der beiden Rollen ein Seil geschlungen ist, das an der Peripherie der Rolle befestigt ist und an dem freien Ende entweder die Last trägt oder von der Kraft angegriffen wird (Fig. 168).

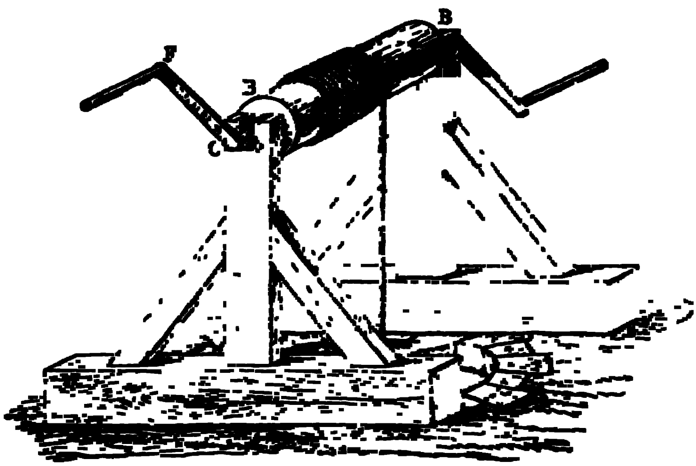


Fig. 169. Winde.

Die übliche Form des auf diesem Prinzip beruhenden Wellrades weicht allerdings insofern ab, als nur die Rolle von kleinerem Durchmesser, die Welle, die Gestalt eines Zylinders hat, während die

größere Rolle (das Rad) durch eine oder zwei Kurbeln ersetzt ist. Eine derartige Vorrichtung (dargestellt durch Fig. 169) wird als Winde bezeichnet*).

Aus der Forderung der Gleichheit der Drehmomente folgt ohne weiteres, daß das Übersetzungsverhältnis eines Wellrades dem Verhältnis der Radien von Welle und Rad gleich ist.

§ 142. Das Differentialwellrad.

Um besonders große Übersetzungen zu erreichen, bedient man sich zweckmäßig des der Differentialrolle verwandten Differentialwellrades. Es besteht aus zwei, am besten aus einem Stücke verfertigten, aneinanderschließenden Wellen von nur wenig verschiedenem Radius, um die ein Seil geschlungen ist, und zwar derart, daß es sich bei dem Abwickeln von der einen Welle auf der anderen aufwickelt. Das Seilstück, das zwischen den beiden Wellen hinabhängt, trägt eine lose Rolle, mittels deren die Last gehoben wird. Dem Angriff der Kraft dient eine Kurbel.

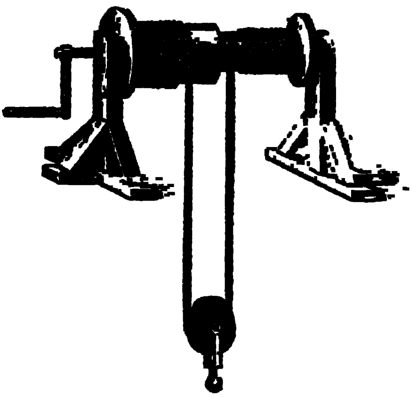


Fig. 170. Differentialwellrad.

Wenn nun das Ende der Kurbel einen Bogen von der Länge s beschreibt, so wird dadurch auf der größeren Welle ein Seilstück von der Länge $s\,r/R$ aufgewickelt, wenn R der Radius der Kurbel ist und r der Halbmesser der größeren Welle. Auf der kleineren Welle, deren Radius r′ sei, wird somit ein Seilstück von der Länge $s\,r'/R$ abgewickelt. Infolgedessen wird das zwischen beiden Wellen hinabhängende Seilstück um die Länge $s\,(r-r')/R$ verkürzt. Halb so groß ist die Strecke, um die die lose Rolle gehoben wird, und daher ergibt sich für das Übersetzungsverhältnis der Differentialwelle der Wert

$$r_i = 1 : \frac{2R}{r - r'}. \qquad (153)$$

§ 143. Die Räderwerke.

Unter einem Zahnrad verstehen wir ein Wellrad, bei dem entweder die Welle oder das Rad oder beide mit äquidistanten Zähnen versehen sind. Eine Kombination solcher Zahnräder wird als ein Räderwerk bezeichnet.

*) Oder auch als Haspel, bei vertikaler Achsenrichtung auch als Göpel.

Das denkbar einfachste Räderwerk erhält man, indem man die Zähne des Rades einer eine Last tragenden Welle in die Zähne einer anderen mit einer Kurbel versehenen Welle eingreifen läßt (Fig. 171). Es seien r der Radius der Welle, die am Seil die Last trägt, R der Radius des zugehörigen gezähnten Rades; r' sei der Halbmesser des eingreifenden sogenannten **Triebrades** und R' die Länge der Kurbel. Wenn nun der Endpunkt P der Kurbel einen Bogen von der Länge s beschreibt, so legt ein Punkt des Umfanges des Triebrades einen Weg sr'/R' zurück. Denselben Weg beschreibt wegen des Ineinandergreifens der Zähne auch ein Punkt des Umfanges des großen Zahnrades, und daher wird das Seil um eine Strecke gehoben, die gleich ist

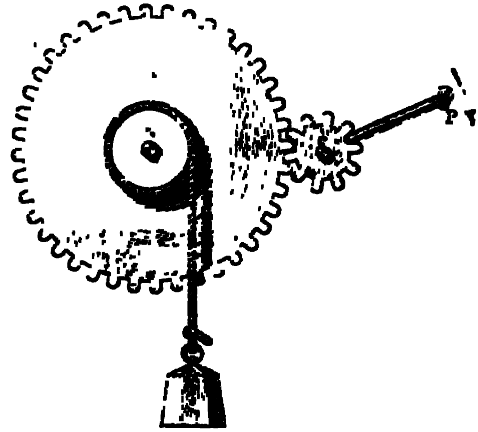


Fig. 171. Einfaches Räderwerk.

$$x = \frac{sr'}{R'} \cdot \frac{r}{R}. \qquad (154)$$

Daraus folgt für das Übersetzungsverhältnis

$$\eta = r'r : R'R. \qquad 155)$$

Da sich bei gleicher Breite der Zähne und der Zahnlücken die Radien R und r' wie die Zahlen der Zähne (Z und z) verhalten, so kann die Gl. 155 auch in der Form geschrieben werden

$$\eta = \frac{r}{R'} \cdot \frac{z}{Z}. \qquad 156)$$

Natürlich können zwischen das die Last tragende Zahnrad und das Triebrad noch beliebig viele andere Zahnräder nach dem in Fig. 172 dargestellten Schema eingeschaltet werden, indem immer die Zähne der Welle des einen Zahnrades in den Umfang des vorangehenden eingreifen. Ist K die an der Kurbel angreifende Kraft, k die Länge der Kurbel, l der Radius der Welle, an der die Last L befestigt ist; sind ferner wieder z und Z die Zähnezahlen von dem Triebrad (ganz rechts in Fig. 172) und dem ersten Zahnrad (ganz links) und sind z', z'', Z', Z'' die Zähnezahlen der dazwischen geschalteten Räder, so gilt die Formel

$$\frac{K}{L} = \frac{l}{k} \frac{z z' z''}{Z Z' Z''}. \quad (157)$$

Durch Einschaltung mehrerer Zwischenräder kann also das Übersetzungsverhältnis beliebig verkleinert werden.

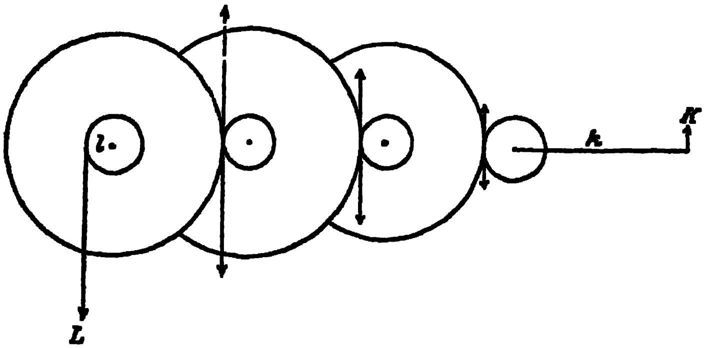


Fig. 172. Räderwerk.

Die technische Ausführung einer Zahnradwinde ist aus Fig. 173 ersichtlich. Zum Heben großer Lasten bedient man sich elektrisch betriebener Zahnradwinden.

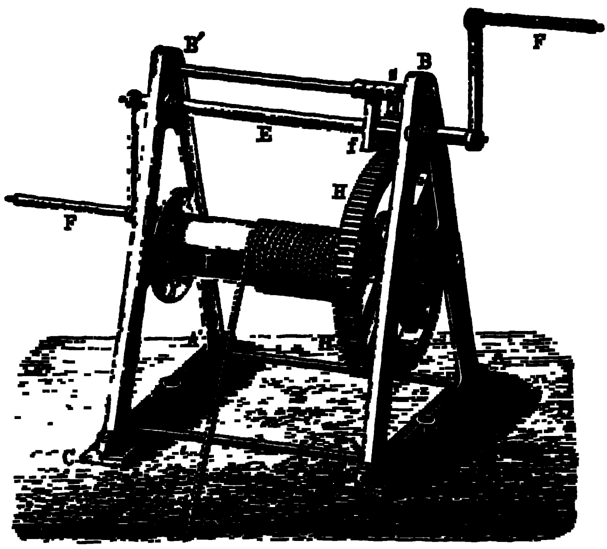


Fig. 173. Zahnradwinde.

§ 144. Der Hebel.

Eine besonders einfache Vorrichtung zur mechanischen Kraftübertragung wird durch einen jeden starren Körper dargestellt, der um eine feste Achse drehbar ist. Wofern in zwei zu dem

Körper gehörigen Punkten zwei oder mehrere Kräfte angreifen, die ihre (auf den Körper bezogenen) Angriffsstellen auch während einer etwaigen Bewegung nicht ändern, wird ein solcher Körper als Hebel bezeichnet.

Ein Hebel wird gerade genannt, wenn beide Angriffspunkte in einer Geraden liegen, die zugleich durch die Drehungsachse hindurchgeht. Je nachdem, ob die beiden Angriffspunkte zu beiden Seiten der Drehungsachse liegen oder aber auf derselben, wird zwischen zweiarmigem und einarmigem Hebel unterschieden. Geht die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte nicht durch die Drehachse hindurch, so wird der Hebel als Winkelhebel bezeichnet.

Unter den Hebelarmen versteht man die senkrechten Abstände der Kraftrichtungen von der Drehungsachse. Die Produkte aus ihnen und den Kraftbeträgen stellen also die Drehmomente der Kräfte dar. Da nur dann Gleichgewicht bestehen kann, wenn die Drehmomente entgegengesetzt gleich sind, so ergibt sich für den Hebel die Gleichgewichtsbedingung in der Forderung, daß sich die Hebelarme umgekehrt wie die Kräfte verhalten müssen.

Die Hebelarme müssen natürlich, wofern der Hebel die Form einer Stange hat, im allgemeinen keinesfalls in die Richtung dieser Stange fallen. Wohl aber ist dies der Fall, wenn der stangenförmig gedachte Hebel horizontal ist, seine eigene Masse vernachlässigt werden darf (man spricht dann von einem „mathematischen" Hebel) und an ihm nun Gewichte angreifen. Für diesen Sonderfall hat bereits Archimedes (um 250 v. Chr.) das richtige Hebelgesetz abgeleitet, während die Ableitung für den schiefen Hebel zuerst Jordanus Nemorarius im 13. Jahrhundert und genauer später Leonardo da Vinci und Ubaldi im 16. Jahrhundert vollbrachten*).

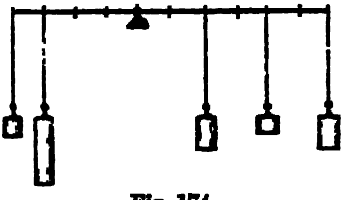


Fig. 174.

Wirken etwa auf jeder Seite eines Hebels mehrere Kräfte, so besteht Gleichgewicht, wenn die Summe der statischen Momente auf der einen Seite ebensogroß wie auf der anderen Seite ist. In dem in Fig. 174 dargestellten Falle mögen beispielsweise auf der linken Seite die Gewichte 10 und 3 in den Entfernungen 3 und 4 wirken; auf der

*) Vgl. A. Haas, Die Grundgleichungen der Mechanik, dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung, Leipzig 1914, I. Vorlesung.

rechten Seite hingegen die Gewichte 5, 2 und 4 in den Abständen 2, 4 und 6 von dem Unterstützungspunkt. Da auf beiden Seiten die Summe der statischen Momente gleich groß, nämlich gleich 42 ist, so besteht bei dieser Anordnung Gleichgewicht.

Jedesfalls setzen sich stets die einzelnen Kräfte zu einer Resultierenden zusammen, deren Angriffspunkt im Gleichgewichtsfall durch einen unterstützten Punkt gehen muß. Dieser muß einen Druck aushalten, der der Resultierenden gleich ist. Deshalb besteht auch dann Gleichgewicht, wenn der Angriffspunkt der Resultierenden zwar nicht fest ist, in ihm aber eine der Resultierenden entgegengesetzte, also vertikal aufwärts gerichtete Zugkraft angreift. In dem durch Fig. 175 dargestellten Fall mögen beispielsweise in den Endpunkten des Balkens AB die Gewichte P und P′ angreifen. In dem Punkte C, der den Balken im umgekehrten Verhältnis der Gewichte P und P′ teilt, greife die nach aufwärts wirkende Zugkraft P″ an, die mittels einer festen Rolle durch ein entsprechendes Gewicht hervorgerufen werde, das der Summe der Gewichte P und P′ gleich sei. Nach dem vorhin Gesagten besteht dann Gleichgewicht, ohne daß der Punkt C fest sein muß. Gleichgewicht besteht aber auch dann, wenn wir uns einen der drei Punkte fest und die in ihm angreifende Kraft beseitigt denken. Je nachdem, ob der Punkt, den wir uns fixiert denken, der Punkt C oder einer der beiden Endpunkte der horizontalen Stange ist, erhalten wir dann einen zwei- oder einen einarmigen Hebel.

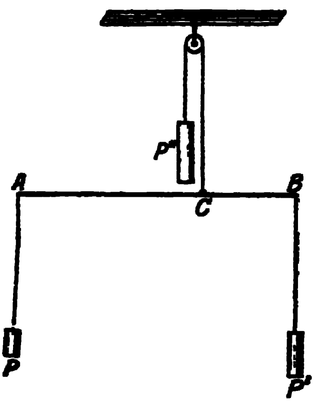


Fig. 175.

Denken wir uns andererseits die beiden Endpunkte A und B fixiert, und unter Fortlassung der Gewichte P, P′ und P″ im Punkte C ein Gewicht Q angreifend, so verteilt sich die Last auf die beiden Endpunkte im umgekehrten Verhältnis der Strecken AC und CB. Ist beispielsweise auf eine von zwei Männern getragene Bahre eine Last von 50 kg so gelegt, daß der Schwerpunkt der Last von dem vorderen Ende der Bahre um 120 cm und von dem hinteren Ende um 80 cm entfernt ist, so hat der vordere Träger einen Druck von 20 kg, der hintere Träger aber einen von 30 kg auszuhalten.

§ 145. Der Hebel als Wage.

Eine jede Maschine kann nicht bloß zur Kraftübertragung, sondern auch auf Grund ihres Gleichgewichtsgesetzes zur Kräftevergleichung verwendet werden. Im besonderen wird ein Hebel, der der Vergleichung von Gewichten dient, als Wage bezeichnet.

Die einfachste und zugleich wichtigste Form der Wage ist die gleicharmige Wage, deren Theorie und Praxis in einem anderen Teile dieses Handbuches (Maß und Messen) eingehend besprochen werden. Auch der ungleicharmige Hebel kann in der Form der so-

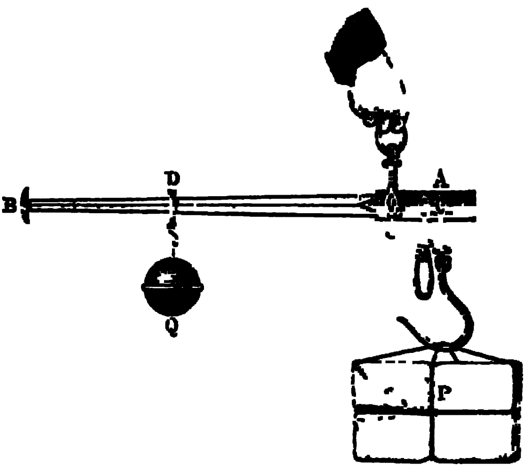


Fig. 176. Schnellwage.

genannten Schnellwage (Fig. 176) zu Wägungen verwendet werden. Am kürzeren Hebelarm hängt bei dieser das zu messende Gewicht in bestimmter Entfernung von der Drehachse, während der längere Hebelarm ein verschiebbares Laufgewicht trägt. Im Gleichgewichtsfalle muß sich das zu ermittelnde Gewicht zu dem Laufgewicht so verhalten, wie der Abstand des Laufgewichtes von der Drehachse zu dem kurzen Hebelarm. An einer Skala, die der längere Hebelarm trägt, kann derart aus der Stelle, die das Laufgewicht bei horizontaler Balkenstellung einnimmt, das zu messende Gewicht abgelesen werden.

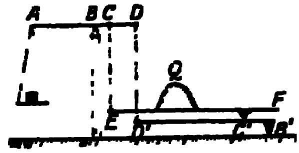


Fig. 177. Die Brückenwage.

Eine besondere Erwähnung verdient auch die in Fig. 177 dargestellte Dezimalwage oder Brückenwage, die eine Kombination von drei Hebeln darstellt. Der erste Hebel ist der um den Punkt B

drehbare Wagbalken, der im Punkte A die Wagschale, in den Punkten C und D aber Zugstangen trägt, die in den Punkten E und D′ in Gelenke enden. Der zweite Hebel ist durch die um den Punkt C′ drehbare Stange EF dargestellt, der dritte endlich durch die um B′ drehbare Stange B′D′.

Der Hebelarm AB wird bei der Konstruktion der Dezimalwage zehnmal so groß gemacht wie die Strecke BC. Überdies wird die Konstruktion gemäß der Proportion vorgenommen

$$BD : BC = B'D' : B'C'. \tag{158}$$

Auf die Brücke (EF) werde nun eine Last Q gelegt. Wir können uns dieses Gewicht in zwei Komponenten Q_1 und Q_2 zerlegt denken, deren eine in dem Punkte C als Zugkraft und deren andere im Punkte C′ als Druckkraft angreife. Letztere Kraft wird gemäß dem Hebelgesetz in der Stärke Q_2/n auf den Punkt D′ und somit auch auf den Punkt D ubertragen, wenn wir mit n das Verhältnis $B'D'/B'C'$ bezeichnen. Da aber auch das Verhältnis BD/BC (nach Gl. 158) n beträgt, so wirkt im Punkte D die Kraft Q_2/n auf dieselbe Weise wie im Punkte C eine Kraft Q_2. In bezug auf den Punkt C ist also die vereinigte Wirkung der Kräfte Q_1 und Q_2 ebensogroß wie die Wirkung eines im Punkte C unmittelbar angreifenden Gewichtes von der Größe $Q_1 + Q_2$, also von der Größe Q. Dieser Last wird aber, weil AB zehnmal so groß wie BC gewählt wurde, durch ein Gewicht Q/10 auf der Wagschale das Gleichgewicht gehalten. Man braucht also in dem betrachteten Falle, um eine bestimmte Last zu wägen, nur zehnmal kleinere Gewichtsstücke, woraus sich die Bezeichnung der Brückenwage als Dezimalwage erklärt. Übrigens werden auch Konstruktionen benutzt, bei denen die Strecke BC hundertmal kleiner gewählt wird als die Strecke AB; man spricht dann von einer Zentimalwage.

Auf welche Stelle der Brücke die zu wägende Last gelegt wird, ist nach dem früher Gesagten gleichgültig. Es läßt sich aber auch leicht zeigen, daß die Brücke bei dem Steigen oder Sinken stets horizontal bleibt. Sinkt beispielsweise der Punkt C um 1 mm, so senkt sich der Punkt D um n mm, ebenso auch der Punkt D′, und daher beträgt die Senkung des Punktes C′, da sie n-mal kleiner ist als die des Punktes D, wiederum 1 mm. Die Brücke verschiebt sich also stets parallel zu sich selbst.

§ 146. Die schiefe Ebene.

Einen besonders einfachen Typus einer Maschine stellt die schiefe Ebene dar, die eine Reduktion der Kraft im Verhältnis von $1 : \sin\alpha$ gestattet, wenn α der Neigungswinkel der Ebene ist

und die Kraft in der Richtung der **Länge** der schiefen Ebene angreift (vgl. die frühere Fig. 25 in § 24).

Greift hingegen die Kraft in **horizontaler Richtung** an, so ist sie gleich der Last, multipliziert mit der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels.

§ 147. Die Schraube.

Wenn wir eine schiefe Ebene auf einem ihr parallelen Zylinder mit vertikaler Achse **aufwickeln**, so erhalten wir eine sogenannte **Schraube**. Aus Fig. 178 ist es ersichtlich, welche Lage bei einer



Fig. 178. Die Schraube.

derartigen Aufwicklung die einzelnen Punkte der schiefen Ebene durch die Aufwicklung erlangen. Den äquidistanten Punkten a. b. c. d, e der schiefen Ebene entsprechen die Punkte a'. b', c', d', e' der Schraubenlinie, wobei die Strecke dd' gleich dem Umfang des Zylinders gewählt wurde; dann kommen die Punkte c' und e' vertikal über den Punkt a und der Punkt d' vertikal über dem Punkt b'. Ein Stück der Schraubenlinie, das von zwei unmittelbar untereinander liegenden Punkten der Linie begrenzt ist. wird als ein **Schraubengang** bezeichnet; der vertikale Abstand zweier solcher Punkte wird die **Höhe** eines Schraubenganges genannt.

Als **Schraubenspindel** wird ein Zylinder bezeichnet, auf dessen Mantel längs einer Schraubenlinie eine Erhöhung läuft. Je nachdem, ob diese prismatische Erhöhung drei- oder viereckig ist, unterscheidet man **scharfe** und **flache** Schraubengewinde (Fig. 179a und b). Wird hingegen das Gewinde auf der **inneren** Seite eines **hohlen** Zylinders eingeschnitten, so entsteht eine sogenannte **Schraubenmutter**. Spindel und Mutter stellen in ihrer Vereinigung eine eigentliche Schraube dar, wofern das Gewinde der Spindel in die vertieften Gänge der Mutter paßt.

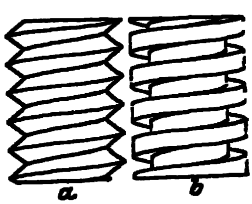


Fig. 179.

Da wir die Schraube als eine auf einem Zylinder aufgewickelte **schiefe Ebene** auffassen können, so gilt für die Schraube dasselbe Gesetz der Kraftübertragung wie für die schiefe Ebene. Die

Höhe des Schraubenganges entspricht der Höhe der schiefen Ebene, der Umfang des Schraubenzylinders der Basis. Wofern die Kraft parallel zur Basis wirkt, was in der Regel der Fall ist, besteht also Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last ebenso verhält wie die Höhe eines Schraubenganges zum Umfang des Schraubenzylinders*).

Ein noch viel günstigeres Übersetzungsverhältnis läßt sich erzielen, wenn man die Kraft nicht unmittelbar am Umfang der Spindel angreifen läßt, sondern an dem Ende eines Hebelarmes. Eine derartige, besonders Kraft sparende Maschine wird als Schraubenwinde bezeichnet. Wenn der Arm des Hebels etwa zehnmal so lang ist wie der Halbmesser der Spindel und die Höhe eines Schraubenganges den zehnten Teil des Umfanges der Schraubenspindel beträgt, so ergibt sich das Übersetzungsverhältnis der Kraft zu $^1/_{100}$.

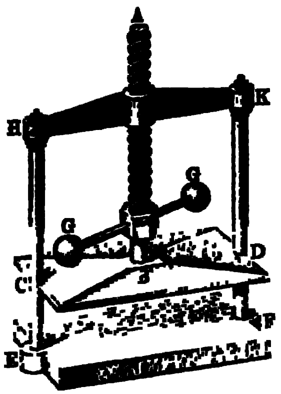


Fig. 180. Schraubenpresse.

Andererseits kann natürlich eine Schraube auch zur Erreichung großer Druckwirkungen verwendet werden. Diesem Zwecke dient die bekannte Schraubenpresse (Fig. 180). Die Schraubenmutter ist an einem starken Rahmen befestigt. In die Mutter paßt eine Spindel, die derart mit der oberen Preßplatte verbunden ist, daß diese zwar den Auf- und Abwärtsbewegungen der Spindel folgt, ohne jedoch an ihren Drehungen teilzunehmen. Dies wird dadurch erreicht, daß das untere Ende der Spindel ein Kugelgelenk trägt, das in einer auf der Preßplatte befestigten Metallplatte steckt.

§ 148. Der Keil.

Ebenso wie die Schraube läßt sich auch der Keil leicht auf die schiefe Ebene zurückführen; denn er stellt im wesentlichen ohnedies nichts anderes dar als eine schiefe Ebene, die selbst bewegt wird. In seiner einfachsten Form besteht der Keil aus einem prismatischen Körper mit zwei ebenen Gleitflächen, die sich unter einem spitzen Winkel schneiden.

Wie mittels eines Keiles eine horizontale Kraft in vertikaler Richtung wirken kann, zeigt Fig. 181. Die eine Gleitfläche des Keils ist horizontal, die andere aber schräg. Auf dieser zweiten

*) Wegen der sehr geringen Steigung der praktisch verwendeten Schrauben kann übrigens ohne merklichen Fehler die Länge eines Schraubenganges dem Spindelumfang gleichgesetzt werden.

Fläche ruhe ein Gewicht, das durch zwei parallele Leisten in vertikaler Richtung geführt werde. Durch ein Gewicht werde der Keil in horizontaler Richtung gezogen. so daß infolgedessen das Gewicht vertikal gehoben wird.

Bezeichnen wir mit φ den Neigungswinkel, so entspricht einer horizontalen Verschiebung um eine bestimmte Strecke, die etwa d genannt werde, eine Hebung der Last um eine Höhe $d \operatorname{tg} \varphi$. und daher ist auch das Übersetzungsverhältnis durch den Quotienten aus der Höhe und der Basis der schiefen

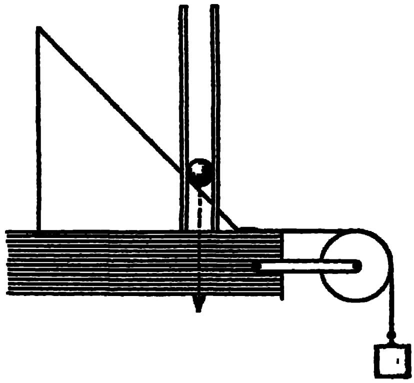


Fig. 181.

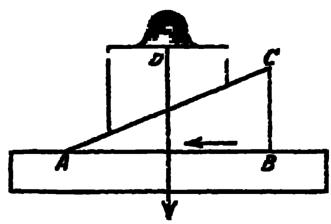


Fig. 182.

Ebene bestimmt. Wenn im besonderen der Neigungswinkel 45° beträgt, so ist das Übersetzungsverhältnis gleich Eins: in diesem Spezialfall wird nur die Richtung der Kraft, nicht aber deren Betrag geändert.

Wie eine schiefe Ebene dadurch, daß sie selbst bewegt wird, eine Last zu heben vermag, ist auch aus Fig. 182 ersichtlich. Das bewegte, eine schiefe Ebene darstellende Prisma ABC gleitet in horizontaler Richtung, einerseits auf wagrechter Unterlage, andererseits längs eines anderen Prismas, das die Last in D trägt. Die Kraft, die das Prisma ABC fortzieht, hält dann der Last das Gleichgewicht, wenn sie sich zu ihr wie die Strecke BC zur Strecke AB verhält.

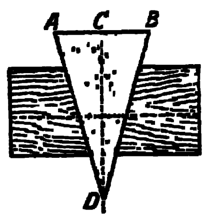


Fig. 183.

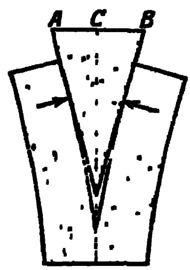


Fig. 184.

Symmetrischer Keil.

Denken wir uns die zuletzt beschriebene Vorrichtung unter Weglassung der horizontalen Unterlage mit Bezug auf AB als Sym-

metrale verdoppelt, so erhalten wir den sogenannten symmetrischen Keil, der in Fig. 183 dargestellt ist. AB wird der Rücken, CD die Mittellinie und AD bzw. BD die Länge des Keiles genannt. Aus Fig. 183 folgt ohne weiteres, daß die Kraft einer senkrecht zur Mittellinie zu überwindenden Gegenkraft dann das Gleichgewicht hält, wenn sie sich zu ihr wie der Rücken des Keils zu dessen Mittellinie verhält. Wirkt hingegen die zu über-

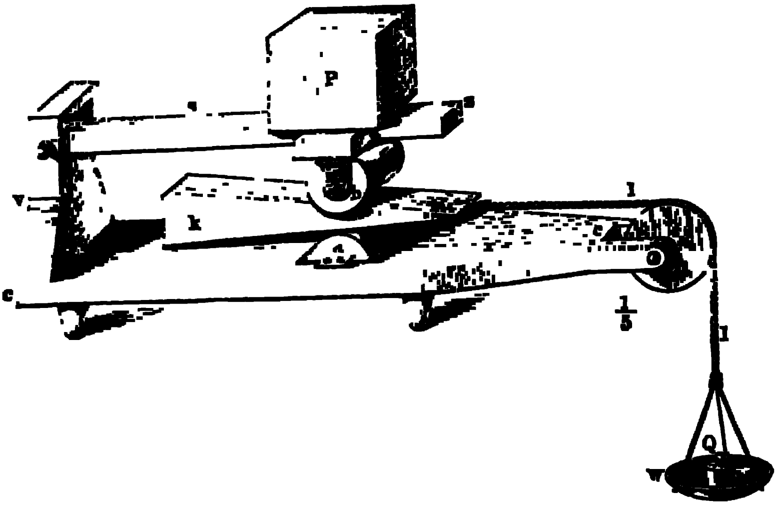


Fig. 185. Experimenteller Nachweis des Gleichgewichtssatzes für den symmetrischen Keil.

windende Gegenkraft senkrecht zur Länge des Keiles (Fig. 184), so besteht Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Gegenkraft wie der Rücken des Keils zu dessen Länge verhält.

Eine Vorrichtung zur experimentellen Bestätigung dieses Gesetzes ist in Fig. 185 dargestellt*). Allgemein bekannte Beispiele für die Anwendung des Keilprinzips sind: Messer, Beil, Nadel usw. Eine einfache Kombination von Keil und Hebel wird durch die Schere dargestellt.

Fünfzehntes Kapitel.

Die Rotation starrer Körper.

§ 149. Die Rotation um eine feste Achse.

Da wir uns alle einen starren Körper zusammensetzenden Massenpunkte immer mit einem Koordinatensystem fest verbunden denken können, so müssen sich alle Bewegungen, die ein starrer Körper

*) Sehr störend wirkt allerdings die starke Reibung.

ausführen kann, stets auf eine Translation und eine Rotation zurückführen lassen (vgl. § 15). Die Translation eines starren Körpers bietet keine anderen Probleme als die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes; denn eine Translation ist eben dadurch gekennzeichnet, daß bei ihr alle mit einem Koordinatensystem fest verbundenen Punkte kongruente Bahnen beschreiben.

Der einfachste Fall einer Rotation liegt dann vor, wenn sich der starre Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine mit ihm starr verbundene, sogenannte feste Achse dreht.

Ist w der Betrag der Winkelgeschwindigkeit und p der Abstand, den ein beliebiger, zu dem Körper gehöriger Massenpunkt von der Rotationsachse hat, so ergibt sich die lineare Geschwindigkeit des betreffenden Massenpunktes zu $w \cdot p$ und somit die lebendige Kraft des rotierenden starren Körpers zu

$$L = \tfrac{1}{2} w^2 J, \tag{159}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$J = \sum m p^2. \tag{160}$$

Die Größe J, die sich ergibt, indem alle Massen mit dem Quadrat ihres Abstandes von der Rotationsachse multipliziert werden und sodann die Summe dieser Produkte gebildet wird, wird als das Trägheitsmoment des starren Körpers in bezug auf die betreffende Rotationsachse bezeichnet*). Die Quadratwurzel des Quotienten aus Trägheitsmoment und Masse (also die Größe $\sqrt{J/m}$) heißt der Trägheitsradius des Körpers um die betreffende Achse.

Erfolgt die Rotation um eine feste Achse, so ist der Abstand von der Rotationsachse unveränderlich, und somit wird die Winkelbeschleunigung als zeitlicher Differentialquotient des Produktes $p \cdot w$ dann gleich $p \cdot dw/dt$. Nach dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetz gilt somit für die auf den einzelnen Massenpunkt wirkende Kraft, die K genannt werde, die Beziehung

$$K = mp \frac{dw}{dt}. \tag{161}$$

Wofern die Kraft den Körper um seine feste Achse dreht, ist das Moment der Kraft um die Achse einfach durch das Produkt $p \cdot K$ gegeben. Bezeichnen wir also das Drehmoment, das aus allen, an

*) Die Bezeichnung als „Trägheitsmoment" erklärt sich daraus, daß, wie die Gl. 159 zeigt, das Trägheitsmoment an die Stelle der trägen Masse tritt, wofern in der Formel für die lebendige Kraft die lineare Geschwindigkeit durch die Winkelgeschwindigkeit ersetzt wird.

den einzelnen Massenpunkten angreifenden Kräften resultiert, mit M und summieren wie die letzte Gleichung, nachdem wir sie mit p multipliziert haben, über alle Massenpunkte des starren Körpers, so finden wir

$$M = J\frac{dw}{dt}. \tag{162}$$

§ 150. Der Steinersche Satz.

Aus der Definition des Trägheitsmomentes folgt, daß es auch bei einem und demselben Körper im allgemeinen für verschiedene Achsen verschiedene Werte haben muß. Eine einfache geometrische Betrachtung führt indessen bereits zu einer wesentlichen Vereinfachung des Problemes der Bestimmung des Trägheitsmomentes. Es läßt sich nämlich ohne weiteres das Trägheitsmoment für jede beliebige Achse angeben, wofern nur das Trägheitsmoment um eine parallele, durch den Schwerpunkt gehende Achse bekannt ist.

Es sei a der Abstand der beiden Achsen, und J sei das als bekannt angenommene Trägheitsmoment um die durch den Schwerpunkt gelegte Rotationsachse. Der senkrechte Abstand eines Massenpunktes des Körpers von der durch den Schwerpunkt gehenden Achse sei p, von der zweiten Achse aber p'. und J' sei das zu ermittelnde Trägheitsmoment um die zweite Achse. Bezeichnen wir mit γ den Winkel. den das Lot p mit der Verbindungsstrecke der beiden Achsen einschließt (Fig. 186), so ist

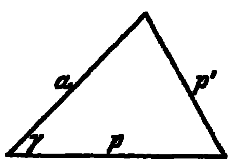


Fig. 186.

$$p'^2 = p^2 + a^2 - 2ap\cos\gamma. \tag{163}$$

Daher wird

$$J' = J + a^2 \sum m - 2a \sum mp\cos\gamma. \tag{164}$$

Machen wir nun die durch den Schwerpunkt gehende Rotationsachse zur z-Achse eines Koordinatensystems und die Verbindungsstrecke zwischen den beiden Umdrehungsachsen zur x-Achse, so wird $p\cos\gamma$ einfach gleich der x-Koordinate. Es wird dann

$$\sum mp\cos\gamma = \sum mx;$$

andererseits ist $\sum mx$ gleich dem Produkt aus der Gesamtmasse des Körpers und der x-Koordinate des Schwerpunktes. Letztere Koordinate verschwindet aber, weil die z-Achse durch den Schwerpunkt geht, und somit nimmt die Gl. 164 die einfachere Form an

$$J' = J + a^2 \sum m. \tag{165}$$

Das Trägheitsmoment um eine beliebige Achse ist also gleich demjenigen um eine parallele, durch den Schwerpunkt gehende Achse, vermehrt um das Produkt aus der Masse des Körpers und dem Quadrate des Abstandes der beiden Achsen. Nach seinem Entdecker wird dieses Theorem als **Steinerscher Satz** bezeichnet. Aus diesem Satz folgt zugleich, daß die durch den Schwerpunkt gehenden Achsen dadurch ausgezeichnet sind, daß für sie das Trägheitsmoment **kleiner** ist als für jede andere parallele Achse.

§ 151. Trägheitsellipsoid und Hauptträgheitsachsen.

Die Mannigfaltigkeit der Werte des **Trägheitsmomentes** für alle durch den Schwerpunkt gehenden Achsen läßt sich auf mannigfache Art **graphisch darstellen**. Man trägt hierzu auf den einzelnen, durch den Schwerpunkt gehenden Geraden von dem Schwerpunkte aus Strecken auf, die man entweder dem Trägheitsmoment selbst oder bestimmten **Funktionen** des Trägheitsmomentes gleich macht. Zu einer besonders einfachen Konstruktion gelangt man, wenn man die Strecken so lange macht, daß das **Quadrat ihrer Länge** numerisch gleich oder proportional ist dem **reziproken Werte des Trägheitsmomentes**: man setzt also

$$l^2 = \frac{1}{J}\,. \qquad (166)$$

Bei dieser Art der graphischen Darstellung erweist sich der geometrische Ort der Endpunkte aller Strecken stets als ein **Ellipsoid**, wie geometrische Betrachtungen zeigen, die an anderer Stelle ausführlicher wiedergegeben werden mögen. Das Ellipsoid wird das **Trägheitsellipsoid** des betreffenden Körpers genannt, die drei Achsen des Ellipsoids werden als die **Hauptträgheitsachsen** des Körpers bezeichnet.

Die auf die Hauptträgheitsachsen bezogenen Werte des Trägheitsmomentes heißen die **Hauptträgheitsmomente** des starren Körpers. Werden sie mit J_1, J_2, J_3 bezeichnet, so ergibt sich für das Trägheitsmoment J um eine beliebige, durch den Schwerpunkt gehende Gerade, die mit den Hauptträgheitsachsen die Winkel α, β, γ einschließt, die Beziehung

$$J = J_1 \cos^2\alpha + J_2 \cos^2\beta + J_3 \cos^2\gamma\,. \qquad (167)$$

Ebensowohl wie für den Schwerpunkt läßt sich das Trägheitsellipsoid natürlich auch für jeden beliebigen anderen Punkt des Körpers konstruieren; doch werden nach dem **Steinerschen Satz** die Ellipsoide um so kleiner, je weiter wir uns von dem Schwerpunkt entfernen (Fig. 187).

Im besonderen kann natürlich das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid sein, indem zwei Hauptträgheitsmomente gleich groß sind. Dies ist immer dann der Fall, wenn der starre Körper eine Symmetrieachse besitzt. In einem solchen Falle ist nur die Richtung einer Hauptträgheitsachse festgelegt, während jede beliebige, zu ihr senkrechte Achse ebenfalls eine Hauptträgheitsachse mit stets gleichem Trägheitsmoment darstellt. Wird das

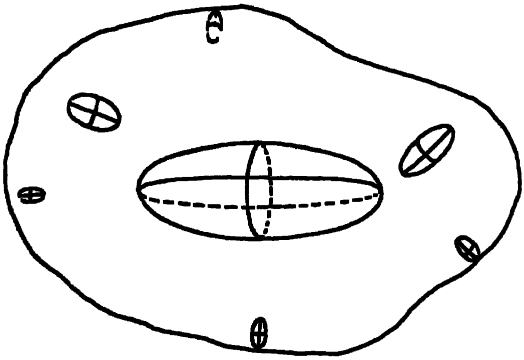


Fig. 187. Das Trägheitsellipsoid.

Trägheitsellipsoid zu einer Kugel, so gibt es überhaupt keine ausgezeichneten Richtungen mehr; das Trägheitsmoment hat dann um jede beliebige Achse denselben Wert. Außer für eine Kugel selbst nimmt das Trägheitsellipsoid auch für homogene reguläre Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder) die Gestalt einer Kugel an.

Der Gedanke der graphischen Darstellung des Trägheitsmomentes durch ein Ellipsoid stammt von Poinsot (1834).

§ 152. Beispiele für die Trägheitsmomente homogener Körper.

Die Berechnung der Trägheitsmomente homogener Körper ist eine im allgemeinen nicht schwierige Aufgabe der Integralrechnung. Die Ergebnisse der Berechnungen seien für einige wichtigere Spezialfälle im folgenden mitgeteilt.

Bei einem rechtwinkligen Parallelepiped mit den Kantenlängen a, b, c wird das Trägheitsmoment um eine durch den Schwerpunkt gehende, der Kante a parallele Achse

$$J = m\frac{b^2 + c^2}{12}, \tag{168}$$

wenn m die Gesamtmasse des Körpers bedeutet. Analoge Formeln gelten natürlich auch für die Trägheitsmomente um die beiden

anderen Hauptträgheitsachsen, die den beiden anderen Kanten parallel sind.

Für das Trägheitsmoment eines **Würfels** um eine zu einer Kante parallele und durch den Schwerpunkt gehende Achse*) folgt daraus

$$J = \frac{ma^2}{6}. \tag{169}$$

Fur einen rechtwinklig-parallelepipedischen **Stab**, bei dem also neben einer Kantenlänge c die beiden anderen vernachlässigt werden können, wird das Trägheitsmoment um eine zu der langen Kante **senkrechte**, durch den Schwerpunkt gehende Achse

$$J = \frac{mc^2}{12}. \tag{170}$$

Bei einem **Kreiszylinder** ergibt sich das Trägheitsmoment um die Zylinderachse zu

$$J = \frac{mr^2}{2}, \tag{171}$$

wenn r der Radius ist; hingegen findet man fur das Trägheitsmoment um eine zu der ersten senkrechte Achse den Wert

$$J = m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right), \tag{172}$$

wenn l die Höhe des Zylinders ist.

Bei einer **Kugel** wird das Trägheitsmoment um eine durch das Zentrum gehende Achse

$$J = \frac{2}{5} r^2 m. \tag{173}$$

Für ein **Ellipsoid** mit den Achsen a, b, c wird das Trägheitsmoment um die Achse a

$$J_a = \frac{m(b^2 + c^2)}{5}, \tag{174}$$

und analoge Formeln gelten natürlich für die Trägheitsmomente um die beiden anderen Achsen. Die Achsen des Trägheitsellipsoids fallen in die Richtungen der Achsen des ellipsoidischen Körpers.

Bei einem **Kreiskegel** wird das Trägheitsmoment um die Achse

$$J = \frac{3}{10} mr^2. \tag{175}$$

---

*) Ebenso groß ist übrigens das Trägheitsmoment um **jede** durch den Schwerpunkt gehende Achse, so daß eben das Trägheitsellipsoid kugelförmig wird.

§ 153. Die experimentelle Bestätigung der für das Trägheitsmoment geltenden Beziehungen.

Hinsichtlich der Rotation eines starren Körpers sind, wie aus dem Ausdruck für das Trägheitsmoment folgt, zwei Massen dann äquivalent, wenn sie sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Umdrehungsachse. Daß dies tatsächlich der Fall ist, läßt sich experimentell an einer der Atwoodschen Fallmaschine nachgebildeten Vorrichtung demonstrieren, deren Schema in den Figg. 188 und 189 wiedergegeben ist. Diese Vorrichtung besteht aus einer Rolle mit zwei konzentrischen Rinnen, deren Radien sich wie 1 : 2 verhalten. Um die größere Rinne sei in dem einen Fall (Fig. 188) eine Schnur geschlungen, die an dem einen Ende ein Gewicht P trage, am anderen Ende dasselbe Gewicht vermehrt um ein kleines Übergewicht p. Im anderen Falle (Fig. 189) hänge von der größeren Rinne nur das Übergewicht p herab, während die kleinere Rolle eine Schnur trage, die an beiden Enden mit dem gleichen Gewicht P′ belastet sei. Wenn nun das Gewicht der Rolle neben den Gewichten P und P′ vernachlässigt werden kann, so müßte in beiden Fällen die gleiche Winkelbeschleunigung erzielt werden und somit in beiden Fällen das Übergewicht in gleichen Zeiten dieselbe Fallstrecke durchlaufen, wofern das Gewicht P′ viermal so groß gewählt wird wie das Gewicht P. In der Tat zeigt dies das Experiment, das derart zuerst von Kurz durchgeführt wurde*).

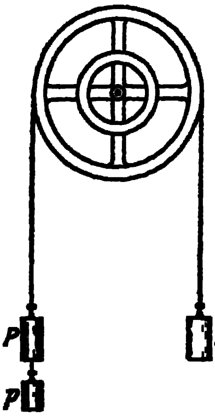


Fig. 188.

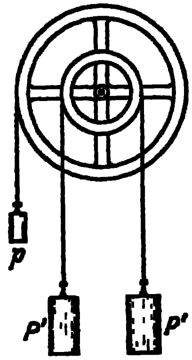


Fig. 189.

Experimenteller Nachweis der für das Trägheitsmoment geltenden Beziehungen.

§ 154. Die Deviationsmomente.

Bei der Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse wirkt auf jeden zu dem Körper gehörigen Massenpunkt eine Zentrifugalkraft. Nach den schon in einem früheren Abschnitt (§ 128) besprochenen allgemeinen Regeln, die für die Zusammensetzung von Kräften an starren Körpern gelten, müssen sich auch

*) Vgl. Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik.

diese Zentrifugalkräfte zu einer resultierenden Einzelkraft und einem resultierenden Kräftepaar zusammenfügen lassen.

Was nun zunächst die Einzelkraft betrifft, so läßt sich zeigen, daß sie immer dann verschwindet, wenn die Rotationsachse durch den Schwerpunkt geht.

Das aus den Zentrifugalkräften resultierende Kräftepaar ergibt ein Drehmoment, das, wie mathematische Ableitungen zeigen, den Körper um eine zu der Rotationsachse senkrechte Achse zu drehen, ihn also aus seiner augenblicklichen Rotationsrichtung abzulenken sucht. Der Betrag des Drehmomentes ist dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit proportional; der Quotient aus dem Drehmoment und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit wird als das Deviationsmoment in bezug auf die Rotationsachse bezeichnet. Machen wir die Rotationsachse etwa zur z-Achse eines Koordinatensystems, so gelten für die Komponenten des das Kräftepaar darstellenden Vektors die Beziehungen

$$M_x = -w^2 \sum myz; \quad M_y = -w^2 \sum mzx; \quad M_z = 0. \quad (176)$$

§ 155. Die freien Achsen.

Nur in einem besonderen Falle verschwindet das durch die Zentrifugalkräfte erzeugte Drehmoment, nämlich dann, wenn der starre Körper um eine seiner Hauptträgheitsachsen rotiert. Andererseits bezeichnet man als freie Achsen solche mit dem Körper fest verbundene Achsen, um die der Körper ohne Einwirkung einer äußeren Kraft mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotieren kann. Es ist klar, daß dies bei dem Vorhandensein eines von Null verschiedenen Deviationsmomentes nicht möglich ist; dann muß nämlich auf den Körper, wofern er seine Rotationsachse beibehalten soll, von außen her ein Drehmoment wirken, das das von den Zentrifugalkräften herrührende eben kompensiert. Aus dem vorhin Gesagten folgt, daß die Hauptträgheitsachsen eines starren Körpers zugleich seine freien Achsen sind.

§ 156. Die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers.

Eine unendlich kleine Lagenänderung eines starren Körpers läßt sich, wie geometrische Betrachtungen zeigen, stets auffassen als Superposition aus einer Translation des starren Körpers, die mit der Geschwindigkeit irgendeines mit dem Körper fest verbundenen Punktes erfolgt, und aus einer Rotation um eine durch den Bezugspunkt gehende feste Achse.

Jeder kleinen Lagenänderung eines starren Körpers entspricht im übrigen eine Gerade, die so beschaffen ist, daß die Lagenänderung

zusammengesetzt gedacht werden kann aus einer Translation in der Richtung dieser Geraden und aus einer momentanen Rotation des Körpers um diese Gerade. Infolgedessen kann jede beliebige, unendlich kleine Lagenänderung eines starren Körpers als eine Schraubung um eine momentane Schraubenachse angesehen werden.

Am zweckmäßigsten ist es, den erwähnten Bezugspunkt mit dem Schwerpunkt des starren Körpers zusammenfallen zu lassen. Die Rotationsrichtung fällt dann zwar im allgemeinen nicht mit der Translationsrichtung zusammen; hingegen nehmen für den Schwerpunkt als Bezugspunkt der Ausdruck für den Drehimpuls und infolgedessen auch die Bewegungsgleichungen des starren Körpers eine besonders einfache Form an.

§ 157. Die rollende Abwärtsbewegung.

Eine besonders bemerkenswerte und einfache Kombination einer Translation und einer Rotation liegt bei einer rollenden Bewegung vor. Von besonderem Interesse ist hierbei wiederum das Hinabrollen längs einer schiefen Ebene.

Die kinetische Energie einer solchen Bewegung setzt sich nämlich zusammen aus der Translations- und der Rotationsenergie. Nennen wir die Translationsgeschwindigkeit v und den Radius des rollenden Körpers r, so ist die Winkelgeschwindigkeit gleich v/r. Daher ist die Rotationsenergie, wenn das Trägheitsmoment mit J bezeichnet wird, gleich

$$E_{rot} = \tfrac{1}{2} J \frac{v^2}{r^2} \tag{177}$$

und somit die gesamte lebendige Kraft

$$L = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{J}{mr^2}\right). \tag{178}$$

Diese lebendige Kraft muß jedenfalls der geleisteten Arbeit gleich sein, die wiederum bestimmt ist durch das Produkt aus der Masse m, der Beschleunigung g des freien Falles und der Fallhöhe h. Da bei einer reinen Translation, also einer rein gleitenden Bewegung die lebendige Kraft gleich ist dem Produkt mgh, so verhält sich demnach gemäß Gl. 178 der abwärts rollende Körper so, als ob seine Beschleunigung gegenüber der der gleitenden Bewegung verkleinert wäre, und zwar im Verhältnis

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{J}{mr^2}}. \tag{179}$$

Nun ist, wie bereits in einem früheren Abschnitt (§ 152) ausgeführt wurde, J/mr^2 gleich $^2/_5$ für eine Vollkugel, gleich $^1/_2$ für einen Vollzylinder und natürlich gleich 1 für einen Hohlzylinder, also ein Rad, weil ja bei einem solchen Körper alle Massenpunkte von der Mitte gleich weit entfernt sind. Es wird daher:

$^5/_7$ für eine rollende Vollkugel,
$^2/_3$ für einen rollenden Vollzylinder,
$^1/_2$ für ein rollendes Rad.

In der Tat zeigt das Experiment, daß von drei Körpern, die bei gleicher Masse in den verschiedenen Gestalten einer Vollkugel, eines Vollzylinders und eines Hohlzylinders eine schiefe Ebene hinabrollen, der Hohlzylinder hinter dem Vollzylinder und dieser wieder hinter der Kugel zurückbleibt.

§ 158. Die Cardanische Aufhängung.

Um einen festen Körper im Raume nach allen Richtungen vollkommen frei drehbar aufzuhängen, bedient man sich

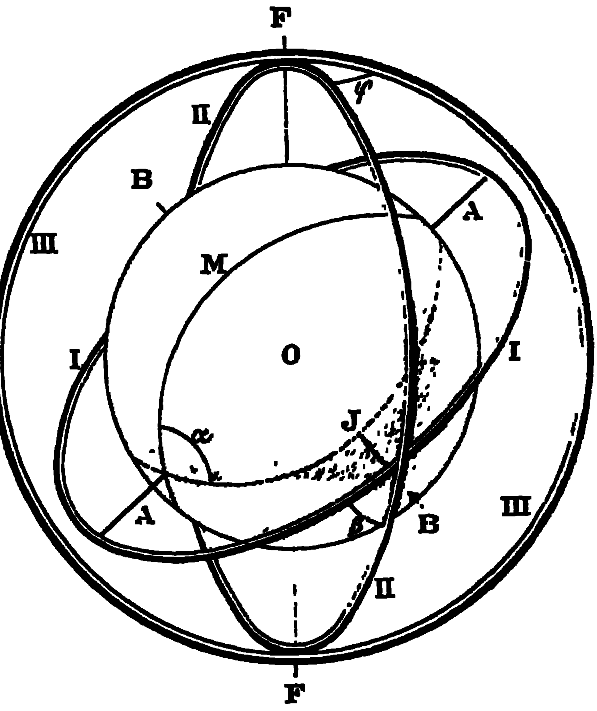


Fig. 190. Cardanische Aufhängung.

zweckmäßig einer Vorrichtung, die bereits im 16. Jahrhundert von dem italienischen Physiker Cardanus ersonnen wurde und die

deshalb gewöhnlich als **Cardanischer Ring** oder als **Cardanische Aufhängung** bezeichnet wird. Das Prinzip dieser Aufhängung ist aus Fig. 190 ersichtlich, in der der besseren Übersichtlichkeit wegen ein leicht abgeplattetes Ellipsoid angenommen wird, so daß bestimmte Hauptträgheitsachsen unterschieden werden können.

Der Körper ist zunächst um die Achse des größten Hauptträgheitsmomentes AA drehbar. Diese Achse endet in zwei Spitzen, die mittels zweier konischer Achsenlager in einen Ring I eingesetzt sind. An zwei von diesen Stellen um 90° abstehenden Stellen besitzt der Ring I an der Außenseite wiederum zwei Spitzen BB, mittels deren der Ring I in einen zweiten, weiteren Ring II eingesetzt ist, so daß der Ring I mitsamt dem Körper um die zu der Achse AA in der Ebene des ersten Ringes normale Achse BB drehbar ist. Endlich ist der zweite Ring wiederum mittels zweier, an seiner Außenseite angebrachter Spitzen um eine **feststehende vertikale Achse** FF drehbar, welche in der Ebene des zweiten Ringes auf der Achse BB senkrecht steht. Die Lager der Achse FF werden von einem dritten Ring (III) getragen, der unbeweglich ist.



Fig. 191. Cardanischer Ring.

Aus Fig. 190 ist es leicht ersichtlich, daß die Lage des Körpers im Raum bei festgehaltenem Schwerpunkt erst durch die Angabe **dreier Winkel** bestimmt ist. Es muß die Lage des Körpers in bezug auf den ersten Ring gegeben sein, ferner die Lage des ersten Ringes innerhalb des zweiten und endlich die des zweiten Ringes innerhalb des dritten. Ist nun etwa AMA ein beliebig auf der Oberfläche des Körpers gewählter Meridian, so ist die Lage des Körpers innerhalb des ersten Ringes durch den variablen Winkel α bestimmt, den der erwähnte Meridian mit demjenigen veränderlichen Meridian einschließt, in dem die Ebene des ersten Ringes den Körper schneidet. Der zweite Winkel, der gegeben sein muß, ist der Winkel β, unter dem die Ebenen der Ringe I und II einander schneiden; der dritte endlich ist der Winkel φ, den die Ebene des zweiten Ringes mit der feststehenden Ebene des dritten Ringes einschließt.

Da aber andererseits die drei genannten Winkel voneinander

völlig unabhängig sind, so nimmt der Körper an etwaigen Bewegungen des dritten Ringes nicht teil. Man benutzt deshalb die Cardanische Aufhängung, um einen Körper vor einer Teilnahme an Bewegungen seines Gestelles zu schützen, also vor allem für Kompasse auf Seeschiffen, wobei für praktische Zwecke in der Regel bereits die Verwendung bloß zweier Ringe genügt (Fig. 191).

Sechzehntes Kapitel.

Das physische Pendel.

§ 159. Die reduzierte Pendellänge.

Ein starrer Körper, der um eine horizontale Achse drehbar ist und unter dem Einfluß seiner Schwere schwingende Bewegungen ausführt, wird als physisches Pendel bezeichnet. Für ein solches muß nach der früher abgeleiteten Gl. 162 die Beziehung gelten, daß das Drehmoment des Gewichtes gleich ist dem Trägheitsmoment um die Achse, multipliziert mit dem zeitlichen Differentialquotienten der Winkelgeschwindigkeit.

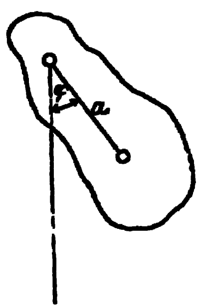


Fig. 192.

Ist nun a der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse und φ der Winkel, den die Verbindungslinie zwischen der Drehachse und dem Schwerpunkt mit der Vertikalen bildet (Fig. 192), so ist das Drehmoment des Gewichtes

$$M = mga \sin\varphi \tag{180}$$

(dabei bedeutet, wie stets, m die Masse des Pendels und g die Beschleunigung der Erdschwere). Die Winkelgeschwindigkeit ist aber gleich $d\varphi/dt$, und es gilt demnach die Beziehung

$$mga \sin\varphi = -J\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{181}$$

Betrachten wir andererseits ein mathematisches Pendel von der Länge l, so ist für dieses die Geschwindigkeit $l\,d\varphi/dt$, daher die Beschleunigung $l\,d^2\varphi/dt^2$, die Entfernung aus der Ruhelage $l \sin\varphi$ und somit (nach Gl. 68)

$$\frac{g}{l}\sin\varphi = -\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{182}$$

Ein Vergleich der Gleichungen (181) und (182) zeigt, daß ein physisches Pendel ebenso wie ein mathematisches schwingt, dessen Länge durch die Formel gegeben ist

$$l^* = \frac{J}{ma}. \tag{183}$$

Die Größe l^* wird als die **reduzierte Pendellänge** bezeichnet.

Ist schließlich J^* das Trägheitsmoment um eine **durch den Schwerpunkt** gehende, der tatsächlichen **parallele Achse**, so ist nach dem **Steinerschen** Satz

$$J = J^* + ma^2. \tag{184}$$

Daher wird

$$l^* = \frac{J^*}{ma} + a. \tag{185}$$

§ 160. Der Schwingungsmittelpunkt.

Fällen wir von dem Schwerpunkt eines physischen Pendels ein Lot auf die Drehachse und tragen wir auf dieser Geraden von der Achse aus die reduzierte Pendellänge auf, so gelangen wir zu einem Punkt, der als der **Schwingungsmittelpunkt** des physischen Pendels in bezug auf die gegebene Drehungsachse bezeichnet wird.

Der Schwingungsmittelpunkt schwingt so, als ob er von allen starren Verbindungen mit den anderen, das Pendel zusammensetzenden Massenpunkten frei und mittels eines gewichtslosen Fadens an der Drehachse befestigt wäre; sonst hingegen werden durch die starren Verbindungen die Schwingungen näher gelegener Massenpunkte verzögert und die weiter entfernter beschleunigt.

Aus Gl. 185 folgt, daß der **Schwingungsmittelpunkt** stets **unterhalb des Schwerpunkts** liegt. Der Abstand beider Punkte ist nach Gl. 185

$$b = \frac{J^*}{ma}. \tag{186}$$

Wir wollen uns nun den **Schwingungsmittelpunkt** selbst als **Aufhängepunkt** denken; d. h. wir legen durch ihn eine **Achse**, die **parallel** zu der ursprünglichen Drehungsachse ist. Den Wert, den in diesem Falle die reduzierte Pendellänge annimmt, wollen wir mit $l^{*\prime}$ bezeichnen. Nach Gl. 185 ist nun

$$l^{*\prime} = \frac{J^*}{mb} + b. \tag{187}$$

Setzen wir aber für b den Wert aus der Gl. 186 ein, so finden wir

$$l^{*\prime} = a + \frac{J^*}{ma} \tag{188}$$

oder nach Gl. 185

$$l^{*\prime} = l^*. \tag{189}$$

Die **Schwingungsdauer** eines physischen Pendels bleibt also

ungeändert, wenn der Schwingungsmittelpunkt zum Aufhängepunkt gemacht wird. Der frühere Aufhängepunkt wird dann der neue Schwingungsmittelpunkt.

Die Schwingungsdauer wird schließlich aber (gemäß Gl. 185) auch dann nicht verändert, wenn wir einen gegebenen Aufhängepunkt P durch einen zu ihm in bezug auf den Schwerpunkt S symmetrischen Punkt P′ ersetzen. Längs einer durch den Schwerpunkt gehenden Geraden sind somit im allgemeinen vier Punkte angebbar, denen (wofern wir sie uns als Aufhängepunkte denken) dieselbe Schwingungsdauer entspricht. Zu dem beliebig gewählten Punkt P gehören der entsprechende Schwingungsmittelpunkt Q und die in bezug auf den Schwerpunkt zu P und Q symmetrischen Punkte P′ und Q′, wobei

$$Q'S = QS, \quad P'S = PS \tag{190}$$

ist (Fig. 193).



Fig. 193.

Jedem gegebenen Werte der Schwingungsdauer oder, was das selbe ist, der reduzierten Pendellänge, entsprechen im allgemeinen zwei verschiedene Werte des Abstandes von dem Schwerpunkt. In bezug auf a ist nämlich die Gl. 185 quadratisch, und indem wir die Gleichung noch mit a multiplizieren, erkennen wir leicht, daß ihre beiden Wurzeln die folgenden sind:

$$\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right\} = \frac{l^*}{2} \pm \sqrt{\frac{l^{*2}}{4} - \frac{J^*}{m}}. \tag{191}$$

Wie natürlich auch unmittelbar aus Fig. 193 folgt, ergibt die Gl. 191 die Beziehung

$$a_1 + a_2 = l^*. \tag{192}$$

Die Gesamtheit aller untereinander parallelen Achsen, für die die Schwingungsdauer einen gegebenen Wert annimmt, bildet also zwei koaxiale Zylindermäntel. Doch existiert natürlich ein ausgezeichneter Wert der Schwingungsdauer, für den die beiden Zylinder zusammenfallen. In diesem Spezialfall gibt es auf einer durch den Schwerpunkt gelegten Geraden statt vier nur zwei Aufhängepunkte gleicher Oszillationsdauer. In Fig. 193 fallen dann die Punkte Q und P′ zusammen und ebenso natürlich auch die Punkte Q′ und P, so daß die reduzierte Pendellänge gleich 2a wird.

Für die ausgezeichnete Schwingungsdauer muß nach Gl. 191 die Beziehung erfüllt sein

$$l^* = 2\sqrt{\frac{J^*}{m}}. \tag{193}$$

Nun ist aber $\sqrt{J^*/m}$ nichts anderes als der sogenannte Trägheitsradius, und somit ist die ausgezeichnete Schwingungsdauer dadurch bestimmt, daß für sie der Abstand der Drehungsachse von dem Schwerpunkt (der in dem betrachteten Spezialfall nach dem früher Gesagten halb so groß wie die reduzierte Pendellänge ist) dem Trägheitsradius gleich wird.

Es ist auch leicht einzusehen, daß diese Schwingungsdauer zugleich die kleinste bei dem physischen Pendel mögliche ist. Bezeichnen wir nämlich den Trägheitsradius kurz mit ϱ, so können wir die Gl. 185 in der Form schreiben

$$l^* = a + \frac{\varrho^2}{a}. \tag{194}$$

Differentiieren wir diese Gleichung nach a als Veränderlicher, so finden wir

$$\frac{dl^*}{da} = 1 - \frac{\varrho^2}{a^2}. \tag{195}$$

Es wird demnach l^* ein Extremum, wenn die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet, wenn also a gleich ϱ ist. Daß aber l^* dann ein Minimum wird, geht daraus hervor, daß die zweite Ableitung von l^* nach a positiv wird.

Der Begriff des Schwingungsmittelpunktes stammt von Huygens (1657), der zuerst auch die Vertauschbarkeit von Schwingungsmittelpunkt und Aufhängepunkt erkannte.

§ 161. Die Längenreduktion des Fadenpendels.

Ein für die praktische Physik besonders wichtiger Spezialfall einer Pendellängenreduktion liegt bei dem sogenannten Fadenpendel vor. Vom theoretischen Standpunkt aus verstehen wir darunter eine Kombination eines langen, dünnen Zylinders und einer daran befestigten Kugel. Ist der Radius des Zylinders genügend klein im Verhältnis zu seiner Länge, können wir also den Zylinder als draht- oder fadenförmig ansehen, und ist auch die Masse des Zylinders klein gegen die der Kugel, so kann mit ziemlicher Annäherung die Kombination von Zylinder und Kugel als mathematisches Pendel angesehen werden. Es entsteht somit die für viele messende Untersuchungen wichtige Frage, welche Korrekturen die gemessene Pendellänge erfahren muß, um die richtige reduzierte Pendellänge zu ergeben.

Wir wollen die Masse der Kugel mit m und die des Zylinders mit m′ bezeichnen. Ferner sei l die Länge des Fadens, r der Radius der Kugel und a der Abstand des Gesamtschwerpunktes des Pendels

von der Drehungsachse. Nach der Definition des Schwerpunktes muß dann das Produkt aus a und der Gesamtmasse gleich sein der Summe der diesbezüglichen Produkte für Kugel und Zylinder. Es ist also

$$a(m+m') = m(l+r) + m'\frac{l}{2} \tag{196}$$

(vgl. Fig. 194). Andererseits finden wir für das Trägheitsmoment der Kugel in bezug auf die Drehachse nach Gl. 173 und dem Steinerschen Satz

$$J_1 = \frac{2}{5}mr^2 + m(l+r)^2. \tag{197}$$

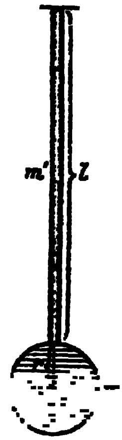


Fig. 194.

Hingegen ergibt sich für das Trägheitsmoment des Zylinders nach Gl. 172, wofern das Quadrat des Zylinderradius neben l^2 vernachlässigt werden darf, und wiederum unter Benutzung des Steinerschen Satzes der Wert

$$J_2 = \frac{m'l^2}{12} + \frac{m'l^2}{4} = \frac{m'l^2}{3}. \tag{198}$$

Da nach der Definition des Trägheitsmomentes die Größen J_1 und J_2 zu addieren sind, so wird

$$l^* = \frac{J_1 + J_2}{a(m+m')} \tag{199}$$

oder nach Gl. 196

$$l^* = \frac{m\left[\frac{2}{5}r^2 + (l+r)^2\right] + \frac{m'l^2}{3}}{m(l+r) + \frac{m'l}{2}}. \tag{200}$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Masse des Zylinders so klein gegen die Masse der Kugel sei, daß

$$\left(\frac{m'}{m}\right)^2 \ll 1 \tag{201}$$

sei. Ferner sei auch, da die Fadenlänge verhältnismäßig groß gegenüber dem Kugelradius angenommen wird,

$$\frac{m'r}{ml} \ll 1. \tag{202}$$

Dann finden wir aus Gl. 200

$$l^* = l + r + \frac{2}{5}\frac{r^2}{l+r} - \frac{lm'}{6m}. \tag{203}$$

Wäre das Fadenpendel tatsächlich wie ein mathematisches Pendel zu behandeln, so wäre die reduzierte Pendellänge natürlich

gleich dem Abstande des Kugelschwerpunktes von der Drehachse, also gleich der Summe aus Fadenlänge und Kugelradius. Die letzten zwei Glieder in Gl. 203 sind somit als Korrektionsglieder anzusehen. Da sie indessen entgegengesetztes Vorzeichen haben, kann man die vier Größen m, m′, r und l derart in eine Beziehung zueinander bringen, daß die beiden Korrektionsglieder einander aufheben. Dies ist dann der Fall, wenn

$$\frac{m'}{m} = \frac{12}{5} \frac{r^2}{l(l+r)} \tag{204}$$

ist.

Als Beispiel für die Anwendung dieser Formel möge etwa der spezielle Fall betrachtet werden, daß Draht und Kugel aus demselben Material hergestellt sind. Dann gilt für den Querschnitt q des Drahtes die Beziehung

$$\frac{m'}{m} = \frac{3ql}{4\pi r^3}. \tag{205}$$

Aus Gl. 204 folgt somit für den Querschnitt der Wert

$$q = \frac{16\pi}{5} \cdot \frac{r^5}{l^2(l+r)}. \tag{206}$$

Ist beispielsweise l = 1 m und r = 2 cm, so müßte gemäß Gl. 206 der Querschnitt des Drahtes zu 0,032 mm² gewählt werden.

§ 162. Die schwingende Stange.

Einen bemerkenswert einfachen Spezialfall eines physischen Pendels stellt eine schwingende Stange dar, die wir uns zylindrisch und an einem Ende aufgehängt denken wollen. Der Abstand zwischen der Drehachse und dem Schwerpunkt der Stange ist dann gleich der halben Stangenlänge (l). Nach Gl. 198 wird somit die reduzierte Pendellänge

$$l^* = \frac{J}{\frac{1}{2}ml} = \frac{\frac{l^2}{3}}{\frac{l}{2}} \tag{207}$$

oder

$$l = \frac{3}{2} l^*. \tag{208}$$

Eine Stange muß also $1^1/_2$ mal so lang sein wie ein Fadenpendel, wenn es mit diesem synchron schwingen soll. Um ein Sekundenpendel darzustellen, müßte beispielsweise eine um ein Ende schwingende Stange eine Länge von etwa 150 cm haben.

§ 163. Das Differentialpendel.

Das einfachste zusammengesetzte Pendel, das vom theoretischen Standpunkte aus denkbar ist, ist eines, das von bloß zwei Massenpunkten gebildet wird. Ein derartiges Pendel läßt sich angenähert durch eine dünne Stange realisieren, längs deren zwei größere Laufgewichte verschiebbar sind. Sind deren Massen m_1 und m_2, und befinden sie sich in den Entfernungen r_1 und r_2 von der Drehachse, so wird, wenn die Laufgewichte wie Massenpunkte behandelt werden dürfen, die reduzierte Pendellänge

$$l^* = \frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2}. \qquad (209)$$

In dieser Formel tritt jedoch nur dann im Nenner ein Pluszeichen auf, wenn sich die beiden Laufgewichte auf derselben Seite von der Drehachse befinden. Liegt hingegen die Drehachse zwischen den Laufgewichten, so muß der Größe r_2 ein entgegengesetztes Vorzeichen wie r_1 gegeben und somit im Nenner des Bruches in Gl. 209 ein Minuszeichen geschrieben werden. Ein derartiges Pendel, dessen Aufhängepunkt in der Mitte liegt, und das zu beiden Seiten der Drehachse verschiebbare Laufgewichte trägt, wird als Differentialpendel bezeichnet*) (Fig. 195).



Fig. 195. Differentialpendel.

Wenn im besonderen die beiden Massen gleich sind, so wird

$$l^* = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1 - r_2}. \qquad 210$$

Sind andererseits die Abstände von der Drehachse gleich, hingegen die Massen verschieden, so gilt die Beziehung

$$l^* = r\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}. \qquad (211)$$

Ist m_2 gleich der Masse m_1, vermehrt um ein kleines Übergewicht q, so können wir die Gl. 211 auch in der Form schreiben

$$l^* = r\,\frac{2m_1 + q}{q}, \qquad (212)$$

eine Formel, die im übrigen sofort die Analogie zwischen Differentialpendel und Atwoodscher Fallmaschine erkennen läßt.

Das Prinzip des Differentialpendels ermöglicht es, Pendel her-

*) Eine Anwendung des Differentialpendels wurde bereits in § 92 besprochen.

zustellen, die trotz kleiner Dimensionen außerordentlich große Schwingungsdauern haben. Beträgt beispielsweise die Länge der Stange 1 m und werden an beide Enden Gewichte von je 1 kg angebracht, wobei jedoch dem einen Gewicht noch ein Übergewicht von 5 g hinzugefügt wird, so erreicht man eine Schwingungsdauer, die nach Gl. 212 einer reduzierten Pendellänge von etwa 400 m entspricht, die also ungefähr 20 Sekunden beträgt.

§ 164. Das Metronom.

Eine wichtige Anwendung findet das Differentialpendel in dem von Mälzel 1813 erfundenen Metronom, das auf einer verhältnismäßig kurzen Stange ein festes und ein verschiebbares Gewicht zu beiden Seiten der Drehachse trägt (Fig. 196). Durch Verstellen der Lage des verschiebbaren Gewichtes kann man die Schwingungsdauer beliebig variieren. Die reziproken Werte der Schwingungsdauern, also die Schwingungszahlen, sind auf einer Skala von vornherein notiert, wodurch die Einstellung auf beliebige Schwingungszahl möglich ist. Das Metronom wird in der Musik als Taktmesser benutzt, indem ein Federmechanismus hörbare Schläge des Pendels hervorruft.

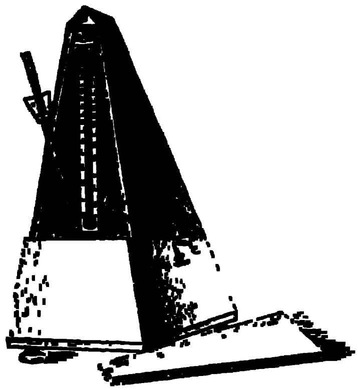


Fig. 196. Metronom.

§ 165. Das Horizontalpendel.

Um sehr langsame Pendelschwingungen hervorzurufen, kann man sich auch des Kunstgriffes bedienen, daß man die Drehungsachse des Pendels möglichst vertikal stellt. Wie schon bei der Besprechung des Machschen Pendelapparates (§ 60) ausgeführt wurde, ist nämlich dann statt der ganzen Fallbeschleunigung nur eine geringe Komponente hiervon wirksam, nämlich nur die Größe $g \cdot \cos \varphi$, wenn φ der Winkel ist, um den die Drehungsachse gegen die Horizontalebene geneigt ist. Ein Pendel, das um eine fast vertikale Achse unter dem Einfluß der Schwere schwingt, wird als Horizontalpendel bezeichnet. Eine um ihre Angeln sich drehende Türe stellt das bekannteste Beispiel eines derartigen Horizontalpendels dar.

Je geringer die Neigung der Drehungsachse gegen die Vertikale ist, desto „indifferenter" ist das Gleichgewicht des Pendels; desto

geringer ist die Direktionskraft, durch die das Pendel bei einer Abweichung aus der Gleichgewichtslage in diese wieder zurückgetrieben wird. Umgekehrt ist aber ein solches Pendel äußerst empfindlich gegen Richtungsänderungen der Drehachse, und es kann daher mit Vorteil zum Nachweis von etwaigen Bodenerschütterungen verwendet werden; hierauf beruht die (hier nicht näher zu erörternde) Benutzung der Horizontalpendel als Erdbebenpendel.

Eine einfache Konstruktion eines Horizontalpendels ist in Fig. 197 wiedergegeben. Die Pendelkugel C wird einerseits durch den in B befestigten Draht oder Faden AB gehalten, andererseits durch die Stange DE, die auf der verstellbaren Schraube E aufliegt. Bei Neigungen der Achse sucht sich das Pendel stets in die Ebene zu drehen, die durch die Achse und die durch C gehende Vertikale bestimmt ist.

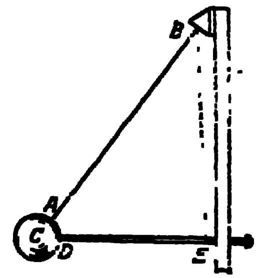


Fig. 197. Horizontalpendel.

§ 166. Die experimentelle Bestimmung von Trägheitsmomenten.

Wenn einem schwingenden Korper Massen angefügt werden, jedoch derart, daß die Summe aller Drehmomente in bezug auf die Achse hierdurch keine Veränderung erfahrt, so muß jedenfalls die Schwingungsdauer dadurch vergrößert werden. Bezeichnen wir nämlich die Summe aller Drehmomente mit M, das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers mit J, das gesamte Trägheitsmoment der hinzugefügten Massen mit J' und die ursprüngliche und die spätere Schwingungsdauer mit τ und τ', so gelten (nach Gl. 183) die Beziehungen

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M}} \tag{213}$$

und

$$\tau' = 2\pi\sqrt{\frac{J+J'}{M}}. \tag{214}$$

In diesen beiden Gleichungen sind die Größen J und M als Unbekannte anzusehen, wofern das Trägheitsmoment der hinzugefügten Massen bekannt ist. Dividieren wir die zweite Gleichung durch die erste, so finden wir, indem wir quadrieren,

$$1 + \frac{J'}{J} = \frac{\tau'^2}{\tau^2} \tag{215}$$

und somit

$$J = J' \frac{\tau^2}{\tau'^2 - \tau^2}. \tag{216}$$

Um trotz der Hinzufügung der Massen das gesamte Drehmoment nicht zu ändern, bringt man entweder zwei gleich große und gleich gestaltete Massen in gleichen Entfernungen von der Drehungsachse auf einer Stange an, oder aber benutzt man eine kreis- oder ringförmige Masse, deren Zentrum man auf die Drehachse aufsetzt.

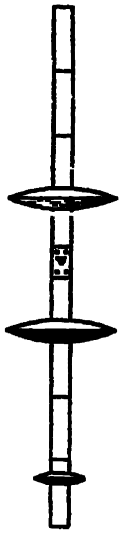


Fig. 198.

Ein Beispiel für die erste Methode ist in Fig. 198 dargestellt. Zu bestimmen sei das Trägheitsmoment des aus der Stange und der festen Linse ganz unten bestehenden Pendels. Man finde beispielsweise, daß es 28 Schwingungen in der Minute ausführt. Um das Trägheitsmoment zu ermitteln, bringt man nun zwei gleiche Linsen von etwa 100 g in einer Entfernung von 30 cm oberhalb und unterhalb der Drehachse an, wodurch die Zahl der Schwingungen in der Minute auf beispielsweise 22 verringert werde. Für die Summe der Trägheitsmomente der beiden hinzugefügten Linsen ergibt sich der Wert

$$J' = 2 \cdot 100 \cdot 900 = 180000 \text{ g cm}^2. \tag{217}$$

Da sich die Schwingungszeiten umgekehrt wie die Schwingungszahlen verhalten, so wird

$$\frac{\tau^2}{\tau'^2 - \tau^2} = \frac{22^2}{28^2 - 22^2} = \frac{484}{300} = 1{,}61. \tag{218}$$

In dem betrachteten Fall ergibt sich also das Trägheitsmoment des Pendels um seine Achse zu 289 800 g cm². Natürlich kann man hieraus auch wieder den Wert des statischen Moments berechnen.

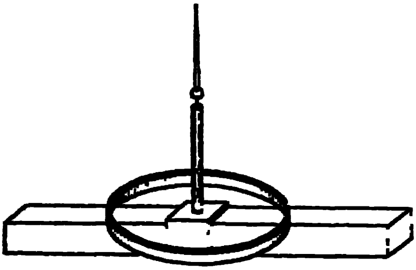


Fig. 199. Experimentelle Bestimmung eines Trägheitsmomentes.

Für die zweite vorhin erwähnte Methode stellt Fig. 199 ein Beispiel dar. Hierbei ist das Trägheitsmoment eines Magnetstabes zu ermitteln, der seine Schwingungen allerdings nicht unter dem Einfluß seiner Schwere, sondern unter dem Einfluß eines benachbarten Magneten ausführt. Um das Trägheitsmoment des Stabes zu finden, wird ein Messingring aufgesetzt, dessen

Trägheitsmoment einfach gleich ist dem Produkt aus seiner Masse und dem Quadrat seines Halbmessers. Durch Beobachtung der Schwingungszeiten vor und nach dem Aufsetzen des Ringes kann wiederum leicht das Trägheitsmoment des Stabes ermittelt werden.

§ 167. Das Bifilarpendel.

Befestigt man einen horizontalen Stab (AB) symmetrisch in gleicher Höhe an zwei gleich langen Fäden (CD und EF), so erhält man ein sogenanntes Bifilarpendel, das nicht nur um die horizontale Verbindungslinie der beiden Aufhängepunkte Schwingungen ausführen kann, sondern auch um die vertikale Achse, die durch die Mittellinie (GH) der beiden Fäden dargestellt wird (Fig. 200).

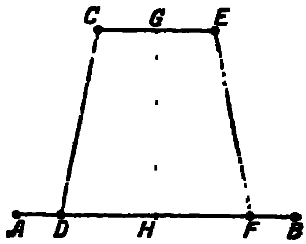


Fig 200. Das Bifilarpendel.

Bei einer Drehung des Stabes aus seiner ursprunglichen Lage wird nämlich der Schwerpunkt des Stabes gehoben, jedoch innerhalb der vertikalen Linie GH. Ein stabiles Gleichgewicht kann aber nur dann bestehen, wenn der Stab die tiefste mögliche Lage einnimmt. Wenn der Stab aus seiner ursprünglichen Stellung gedreht ist, trachtet er somit in seine tiefste Lage zurückzukehren. Infolge des Beharrungsvermögens überschreitet er aber diese, wodurch er wiederum gehoben wird, so daß das Zurückstreben in die ursprüngliche Lage zu Pendelschwingungen um eine vertikale Achse führt. Ein derartiges Bifilarpendel besitzt also eine bestimmte Gleichgewichtslage, während es nahezu in einer horizontalen Ebene schwingt*).

Es werde nun das Bifilarpendel aus der Vertikalebene, die durch seine Gleichgewichtslage und die Aufhängepunkte bestimmt ist, um einen Winkel φ hinausgedreht. Hierbei mögen die Punkte D und F nach D′ und F′ rücken (Fig. 201). Wenn wir nun annehmen, daß die Abstände der Aufhängepunkte und auch der Befestigungspunkte von der Symmetralen klein seien gegenüber der Fadenlänge, dann können wir die Bewegung des Stabes als eben und rein horizontal behandeln, also von den kleinen vertikalen Verschiebungen des Schwerpunktes

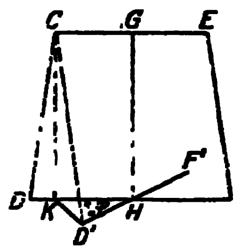


Fig. 201.

*) Die Schwingungen sind nur angenähert horizontal, und zwar um so genauer, je kleiner sie sind.

abstrahieren, zumal dann, wenn wir nur kleine Drehungen betrachten.

Wir denken uns nun durch die Punkte D′ und C eine Vertikalebene gelegt, die die Gerade AB in dem Punkte K schneide. Andererseits können wir uns das Gewicht des Balkens Q in zwei gleiche Teilkräfte (also je Q/2) zerlegt denken, die in den Punkten D′ und F′ angreifen. Wir fassen zunächst die erste Teilkraft ins Auge und zerlegen sie wiederum in zwei zueinander senkrechte Komponenten, deren eine die Richtung des Fadens habe, so daß sie also durch dessen Spannung aufgehoben wird. Die andere Komponente fällt in die Richtung der Strecke KD′ und ist gleich

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{\overline{D'K}}{h}, \tag{219}$$

wenn wir mit h die Länge der Strecke GH, also die Höhe des Bifilarpendels bezeichnen.

Andererseits ist der senkrechte Abstand p dieser Kraftkomponente von der vertikalen Drehungsachse gleich a sin (KD′H), wenn wir mit a den Abstand bezeichnen, den die Punkte, in denen der Stab an den Fäden befestigt ist, von der Mitte des Stabes haben. Somit ergibt sich das ganze Drehmoment zu

$$M = 2Pp = \frac{Qa}{h} \cdot D'K \cdot \sin(KD'H). \tag{220}$$

Da sich aber in einem Dreieck die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten, so gilt die Proportion

$$HK : KD' = \sin(KD'H) : \sin\varphi. \tag{221}$$

Bezeichnen wir den Abstand eines Aufhängepunktes von der vertikalen Symmetrielinie (also die Strecke CG oder GE) mit b, so läßt sich somit die Gl. 220 in die Form bringen

$$M = Q\frac{ab}{h}\sin\varphi. \tag{222}$$

Wie aus den Gleichungen (180) und (181) des früheren § 159 folgt, gilt aber für die Winkelbeschleunigung die Relation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{M}{J}, \tag{223}$$

und hieraus folgt nach Gl. 182 für die reduzierte Pendellänge des Bifilarpendels die Formel

$$l^* = \frac{Jgh}{Qab}. \tag{224}$$

Aus dieser Formel ist auch ohne weiteres ersichtlich, wie durch

bifilare Aufhängung eines Stabes auf Grund von Schwingungsbeobachtungen das Trägheitsmoment eines Stabes experimentell ermittelt werden kann.

§ 168. Die Fehlerquellen der Pendelbeobachtungen.

Da das Pendel zu der Bestimmung der Schwerebeschleunigung verwendet werden kann, andererseits aber die Ermittlung der Schwereverteilung auf der Erdoberfläche (da es dabei auf geringfügige Differenzen ankommt) außerordentlich genaue Pendelmessungen erfordert, so hat schon früh die Frage nach den Fehlerquellen bei Pendelbeobachtungen eine große Wichtigkeit erlangt. Aufgabe experimenteller und theoretischer Untersuchungen war es, Formeln abzuleiten, mittels deren der störende Einfluß verschiedener Faktoren bei der Berechnung der reduzierten Pendellänge eliminiert werden kann.

Die wichtigsten Störungen rühren von der endlichen Amplitude, von der umgebenden Luft, von der Aufhängung, von dem Mitschwingen des Stativs, von der Elastizität des Pendels und von der Temperatur her. Diese Einflüsse mögen in den folgenden Abschnitten näher erörtert und schließlich auch die verschiedenen Vorrichtungen besprochen werden, die diese störenden Einflüsse nach Möglichkeit ausschalten oder wenigstens verringern.

§ 169. Der Einfluß der endlichen Amplitude.

Bezeichnen wir mit τ die bei endlicher Amplitude α beobachtete Schwingungsdauer und mit τ die Schwingungsdauer, die dasselbe Pendel bei unendlich kleiner Amplitude hätte, so hängen nach der früheren Gl. 66 die beiden Werte der Schwingungsdauer näherungsweise durch die Beziehung zusammen:

$$\tau - \tau_0 = \tau \frac{\alpha^2}{16}. \qquad 225$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt die sogenannte Reduktion auf unendlich kleine Amplitude dar. Sie ist, wie schon in § 53 ausgeführt wurde, in dieser Form vollkommen genügend, wenn die Amplitude nur einige wenige Grade beträgt. So ist der Fehler der Gl. 225 kleiner als $5 \cdot 10^{-8}\,\tau$, wenn die Amplitude kleiner als 3° ist.

Eine Komplikation ist nun allerdings dadurch hervorgerufen, daß die Ermittlung der Schwingungsdauer stets längere Zeit erfordert, und sich mittlerweile die Amplitude selbst vermindert. Infolgedessen ist die Reduktion genauer durch das Integral dargestellt

$$J = -\frac{\tau}{t_2 - t_1}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\alpha^2}{16}\,dt, \tag{226}$$

wenn sich die Beobachtung über eine Zeit von t_1 bis t_2 erstreckte. Der Wert des bestimmten Integrals wird entweder derart ermittelt, daß man auf Grund des bekannten Gesetzes der Amplitudenabnahme die Amplitude als Funktion der Zeit darstellt und dann integriert, oder aber wiederholte Messungen der Amplitude während der Beobachtungsdauer vornimmt und dann das Verfahren der mechanischen Quadratur einschlägt.

Ist die Anfangsamplitude (wie es jetzt üblich ist) kleiner als $^1/_2{}^\circ$, so genügt es in der Regel, das arithmetische oder das geometrische Mittel aus dem Anfangs- und Endwerte der Amplitude zu nehmen. Genauer ist eine von Borda abgeleitete Formel, derzufolge das Korrektionsglied mit der Anfangsamplitude α_1 und der Endamplitude α_2 folgendermaßen zusammenhängt:

$$\Delta\tau = -\tau\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{32(\ln\alpha_1 - \ln\alpha_2)}. \tag{227}$$

§ 170. Die aerostatische Reduktion.

Der Einfluß der das Pendel umgebenden Luft äußert sich in dreifacher Weise: erstens in einer Verminderung des Gewichtes und damit des Drehmomentes des Pendels; zweitens in einer durch das Mitschwingen der Luft bedingten Vermehrung des Trägheitsmomentes und drittens schließlich in einer Dämpfung der Pendelschwingungen.

Dem Einfluß der ersten Art wird durch die sogenannte aerostatische Reduktion Rechnung getragen. Ist nämlich m′ die Masse der verdrängten Luft, und a′ der Abstand des sogenannten Volumschwerpunktes*) des Pendels von der Drehachse, so ist das korrigierte Drehmoment (statt mga)

$$M = g(ma - m'a'). \tag{228}$$

Diese durch den Auftrieb des Pendels bedingte aerostatische Korrektur ist zuerst von Bouguer (1749) eingeführt worden**). Für homogene Pendelkörper wird natürlich a′ gleich a.

§ 171. Die aerodynamische Reduktion.

Die das Pendel umgebende Luft vermindert, wie schon erwähnt wurde, nicht nur das Gewicht, sondern sie vermehrt auch infolge

*) Der Volumschwerpunkt ist identisch mit dem Schwerpunkt eines beliebigen das Volumen erfüllenden Körpers von überall gleicher Massendichte.

**) Figure de la Terre, Paris 1749.

ihres Mitschwingens das Trägheitsmoment des Pendels. Wie zuerst Dubuat*) (1786) und unabhangig von ihm später Bessel**) (1826) erkannten, wird die sogenannte aerodynamische Reduktion am einfachsten derart vorgenommen, daß man das Quadrat des Trägheitsradius des Pendels statt mit der Pendelmasse m mit dem Ausdruck (m + km′) multipliziert, wobei m′ wieder die Masse der verdrängten Luft bedeutet und k eine für das Pendel charakteristische Konstante darstellt.

Die Kombination der aerodynamischen mit der aerostatischen Reduktion ergibt für die Korrektion der reduzierten Pendellänge (unter der Voraussetzung homogenen Materials) den Wert

$$\Delta l = l\,\frac{m + km'}{m - m'}. \qquad 229$$

(Zur Vereinfachung möge im folgenden die reduzierte Pendellänge kurz mit l statt wie bisher mit l* bezeichnet werden.)

Den Wert des Proportionalitätsfaktors k bemühten sich viele Physiker sowohl auf theoretischem als auch auf experimentellem Wege zu ermitteln. Eingehende experimentelle Messungen stellte zunächst Bessel an. Er verwendete hierzu zwei Pendelkugeln von gleicher Große, jedoch verschiedener Dichte. Indem er die Messungen einerseits mit einer Elfenbein- und andererseits mit einer Messingkugel vornahm, erhielt er fur k einen Wert von ungefähr 0,6, woraus folgen wurde, daß nur etwa zwei Drittel der verdrängten Luftmasse an den Schwingungen des Pendels teilnehmen. Bessel fand indessen auch bereits, daß einen sehr großen Einfluß auf den Wert von k die Gestalt des Pendelkörpers hat. So erhielt Bessel bei einem Hohlzylinder für k den Wert 0,75, hingegen für denselben Zylinder, als er ihn ohne Boden schwingen ließ, den enormen Wert 8,10.

Einen anderen Weg als Bessel schlug etwas später (1829) Sabine***) ein, indem er einerseits das umgebende Mittel wechselte, andererseits bei Luft deren Dichte variierte und auch im luftleeren Raume beobachtete. Besonders eingehende Untersuchungen stellte wiederum einige Jahre später (1832) Baily an†). Er experi-

*) Principes d'hydraulique, vérifiés par un grand nombre d'expériences, Paris 1786.

**) Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels. Berliner Akademie, Abhandlungen 1826; auch Nr. 7 von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften.

***) Phil. Transactions 119 (1829), p. 207.

†) Phil. Transactions, London, 122 (1832), p. 399.

mentierte mit 41 Pendeln verschiedenster Konstruktionen, die sich hinsichtlich ihrer Größe und Gestalt, hinsichtlich der Materialdichte und der Art der Aufhängung unterschieden. Aus diesen Untersuchungen ging hervor, daß der Proportionalitätsfaktor k im wesentlichen nur von der Größe und Gestalt des Pendelkörpers abhängt. Er wird bei Kugelgestalt um so größer, je kleiner der Durchmesser ist. Die Abhängigkeit von der Gestalt erklärt es, daß auch der Pendelfaden selbst einen bei genaueren Messungen zu berücksichtigenden Einfluß auf die Schwingungsdauer hat.

In einem und demselben Mittel kann, wie die Messungen von Sabine und Baily zeigten, der Wert von k der Dichte des Mittels proportional angenommen werden. Doch gilt diese Proportionalität nur für ein und dasselbe Medium und keineswegs allgemein. So ist beispielsweise unter sonst gleichen Umständen der Wert von k in Luft geringer als in dem viel dünneren Wasserstoff. Dies erklärt sich aus dem wesentlichen Einfluß der inneren Reibung der Gase, auf den in diesem Zusammenhang zuerst Stokes im Jahre 1850 aufmerksam gemacht hat.

Stokes hat auch zuerst eine mit der Erfahrung verhältnismäßig gut übereinstimmende theoretische Ableitung des Faktors k gegeben*), und zwar für die beiden Spezialfälle einer Kugel und eines Zylinders**). Dabei beschränkte Stokes seine Deduktionen auf unendlich kleine Schwingungen und vernachlässigte die Kompressibilität der Luft. Eine exaktere Ableitung gab später (1871) O. E. Meyer***), wobei er übrigens auch bewies, daß in der Tat die Kompressibilität der Luft unberücksichtigt bleiben darf.

Für Schwingungen, die in einem unbegrenzten Medium von der Dichte ϱ und der absoluten Zähigkeit η durch eine Kugel vom Radius r ausgeführt werden, leitete Meyer für k den Wert ab

$$k = \frac{1}{2} + \frac{9}{4a}\sqrt{\frac{2\eta\tau}{\pi\varrho}}, \tag{230}$$

wobei τ wieder die Schwingungsdauer bedeutet†).

---

*) Vor Stokes haben theoretische Ableitungen bereits Poisson (1832) und Green (1836) versucht. Daß ihre Resultate mit der Erfahrung nicht übereinstimmten (für die Kugel fand Poisson z. B. $k = \frac{1}{2}$), erklärt sich aus der Vernachlässigung der inneren Reibung.

**) On the Effect of the internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums, Cambridge, Phil. Transactions, 9 (1856), II, p. 8.

***) Journal für Mathematik, 73 (1871), S. 31.

†) Umgekehrt kann man auch aus Pendelbeobachtungen den Koeffizienten der Zähigkeit ermitteln.

§ 172. Die Dämpfung.

In viel höherem Grade als die Schwingungsdauer . . . wird durch die Luft die **Amplitude** der Pendelschwingungen beeinflußt. Das **Dämpfungsverhältnis** (der Quotient zweier aufeinander folgender größter Ausschläge*) hangt vor allem von der Dichte der Luft ab.

Eine ganz geringfugige Korrektur ergibt sich aus der Dämpfung auch für die reduzierte Pendellänge; sie ist durch die Formel darstellbar

$$\Delta r = -\frac{\gamma^2 r}{2\pi^2}, \qquad 231$$

wenn mit γ das logarithmische Dekrement bezeichnet wird.

In der Praxis sucht man den Luftwiderstand dadurch möglichst zu verringern, daß man dem Pendelkörper die Gestalt einer **flachen Linse** gibt.

§ 173. Der Einfluß der Aufhängung.

Zahlreiche, sehr wesentliche Störungen können bei Pendelmessungen durch die **Aufhängungsvorrichtung** verursacht werden. Bei Fadenpendeln wird der Faden gewöhnlich einfach **eingeklemmt**, in welchem Falle die **Steifigkeit** des Fadens ein vollständiges Schwingen des obersten Teiles verhindert: die Wirkung ist dieselbe wie eine **Verkürzung** des Fadens. Das Ausmaß dieser Verkürzung hängt außer von molekularphysikalischen Eigenschaften der Draht- oder Fadensubstanz von der Dicke und auch von der Amplitude der Schwingungen ab.

Bei einer anderen Art der Aufhängung wird der Faden über einen kleinen Zylinder geführt, von dem man ihn sich **abwickeln** läßt. Das Pendel beschreibt dann eigentlich nicht einen Kreis, sondern eine Kurve, deren Evolute kreisförmig ist.

Die gebräuchlichste Aufhängungsart ist jedoch die mittels **Schneiden**. Die Schneide wird in der Regel an dem Pendel befestigt und das **Lager** an dem Stativ angebracht. Als Material wird für das Lager gewöhnlich **Achat**, für die Schneide ebenfalls Achat oder **Stahl** gewählt. Nach einer Idee **Bordas** werden die Schneiden zweckmäßig „**synchronisiert**“, d. h. die Lage des Schwerpunktes der Schneide wird so reguliert, daß die Schneide für sich als kleines Pendel mit derselben Schwingungsdauer wie das Pendel selbst schwingt.

Bei der Benutzung von Schneiden entstehen Fehlerquellen durch die **Unschärfe** der Schneide, durch ihr **Rollen** und ihr **Gleiten**.

---

*) Vgl. § 65.

Für den Fall, daß der unterste Teil der Schneide als kreisförmig angesehen werden darf, ergibt sich die Korrektion der reduzierten Pendellänge l zu

$$\Delta l = + \frac{\varrho l}{a}, \qquad (232)$$

wenn ϱ den Radius der Schneide und a den Abstand des Schwerpunktes des Pendels von der Schneide bedeutet. Der Fehler ist also dem Radius proportional, der ja nur bei absoluter Schärfe der Schneide verschwinden würde. Beträgt beispielsweise der Krümmungshalbmesser ein Zehntel Millimeter, so ergibt sich bei einem Sekundenpendel der Fehler immerhin zu ein Zehntel Promille.

Nachdem die zuletzt erwähnte Formel bereits von Euler*) (1788) und von Laplace**) (1816) abgeleitet worden war, hat Bessel (1826) auch den allgemeineren Fall behandelt, daß die Schneide von einem kegelschnittförmigen Querschnitt begrenzt wird. In diesem Falle erhielt Bessel als Korrektur der reduzierten Pendellänge

$$\Delta l = + \frac{b q}{a} l, \qquad (233)$$

wobei b die Breite der Abstumpfung und q eine von der Schneidenform abhängige Konstante ist.

In experimenteller Hinsicht ist das Gleiten der Schneide eingehend bereits von Bessel untersucht worden. Sein Verfahren bestand darin, daß unter geringem Druck ein in horizontaler Richtung leicht verschiebbares Metallstück gegen die Schneide gepreßt wurde, derart, daß es bei dem Gleiten (nicht aber bei dem Rollen) von der Schneide mitgenommen wurde. Die durch das Gleiten hervorgerufene Bewegung kann mittels eines Fühlhebels oder mittels optischer Interferenzen beobachtet und gemessen werden.

Derart stellte Bessel fest, daß die Schneide kleine Bewegungen, und zwar in demselben Sinne wie das untere Ende des Pendels, ausführt. Das Ausmaß der Bewegung ist der Amplitude des Pendels proportional, von dem Abstand zwischen Schwerpunkt und Schneide unabhängig, dagegen in hohem Grade von dem Material der Unterlage abhängig. Je weicher die Unterlage ist, desto stärker ist das Gleiten. Darum wird eben als Unterlage am besten der besonders harte Achat verwendet, bei dem das Gleiten in viel geringerem Ausmaß auftritt als etwa bei der Verwendung von Messing.

---

*) Nova Acta Acad. Petrop. 6 (1788), Mém. p. 145.
**) Ann. chim. phys. 3 (1816), p. 92.

Mittels ähnlicher Methoden ist das Gleiten der Schneide experimentell auch von Oppolzer*) und von Defforges**) untersucht worden. Bei einem Sekundenpendel fand Defforges bei einer Amplitude von 30′ eine Gleitung von 0,2 μ.

Der Einfluß der Schneide äußert sich auch in einer Dämpfung der Pendelschwingungen. Außer dem Widerstand der Luft bewirkt also auch die Schneide eine allmähliche Abnahme der Amplitude. Der gemeinsamen Einwirkung beider Einflüsse kann man für genaue Messungen am einfachsten mittels der Formel Rechnung tragen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = A + B\alpha + C\alpha^2, \tag{234}$$

worin α die Amplitude bedeutet, A, B und C aber empirisch zu ermittelnde Konstanten sind. Die weitaus wichtigste Konstante ist die mittlere. Neben dem mittleren Gliede $B\alpha$ konnen die beiden anderen fast immer weggelassen, es kann also dann einfach eine geometrische Abnahme der Amplitude angenommen werden***). Das Glied $C\alpha^2$ kommt nur bei größeren Amplituden in Betracht, während das erste Glied A die von der Geschwindigkeit unabhängigen Einflüsse wiedergibt, die vor allem von der Schneide herrühren.

§ 174. Der Pendelapparat von Bessel.

Um den störenden Einfluß der Aufhängung aus den Messungsergebnissen zu eliminieren, ersann Bessel im Jahre 1826 einen Apparat, der auf der schon in einem früheren Abschnitt (§ 59) erwähnten Differenzmethode beruht. Bessel benutzte zwei Fadenpendel von verschiedener Länge, bei denen aber die Kugeln gleich beschaffen waren und auch die Art der Aufhängung dieselbe war. Der Längenunterschied der beiden Pendel wurde so gewählt, daß er möglichst wenig von der damals als Längeneinheit benutzten Pariser Toise†) abwich. In dem Endergebnis fallen dann natürlich alle von der Aufhängung herrührenden Korrekturen weg, da sie für beide Pendel mit gleichem Vorzeichen gleich sind.

Schematisch ist der Besselsche Pendelapparat in Fig. 202 dar-

---

*) Permanente Kommission der europäischen Gradmessung (Paris) 1875, Annex I, p. 99.

**) Permanente Kommission (Florenz) 1891, S. 154.

***) Bei Beobachtungsreihen, die sich über 22 Stunden (bei einem Luftdruck von 0,05 Atmosphären und Amplitudengrenzen von 80 und 5 Bogenminuten) erstreckten, ergab sich eine genügend genaue Darstellung, wenn A und C gleich Null gesetzt wurden. Vgl. Survey of India, 5, p. 127 und 213.

†) Eine Toise (6 Pariser Fuß) ist gleich 1,94904 m.

gestellt. Er besteht zunächst aus einer eisernen Schiene AB, die vertikal gestellt ist und die, ungefähr um ein Drittel ihrer Länge von dem unteren Ende entfernt, einen festen Ansatz i trägt, der oben in eine hori-

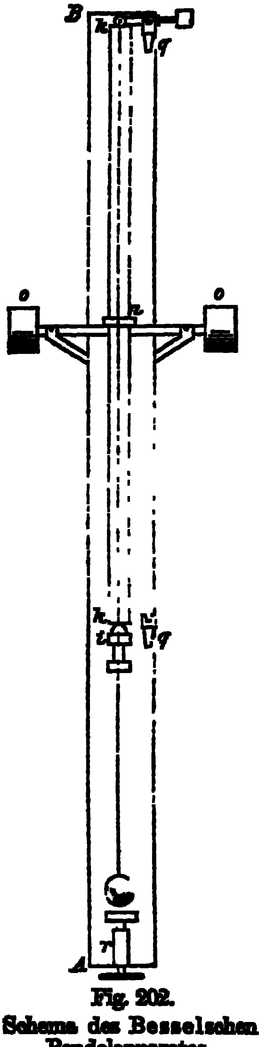


Fig. 202.
Schema des Besselschen Pendelapparates.

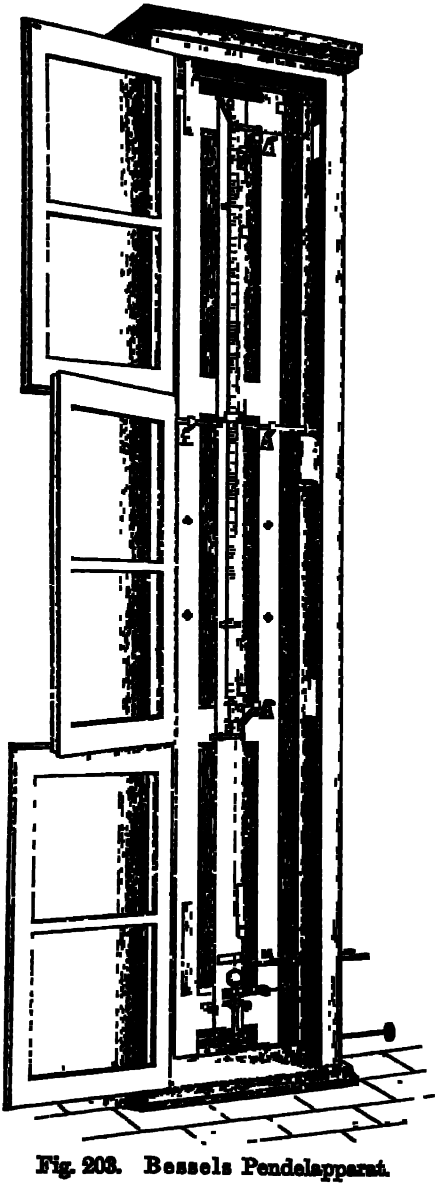


Fig. 203. Bessels Pendelapparat.

zontale ebene Fläche mündet. Auf diese wurde vertikal ein Maßstab von der Länge einer Toise (kk) gestellt. In der Mitte (bei n) wurde der Maßstab festgehalten oder durch eine seinem Gewicht

gleiche Kraft nach oben gezogen. Dadurch wurde es erreicht, daß die Verlängerung der unteren Hälfte durch eine gleich große Verkürzung der oberen Hälfte kompensiert wurde, die Gesamtlänge also durch die vertikale Stellung nicht beeinflußt wurde. Ferner waren an der Schiene zwei gleichbeschaffene Gabeln (q, q) befestigt, die die Aufhängevorrichtungen trugen, von denen das Pendel hinabhing; diese Vorrichtungen lagen entweder auf der oberen Fläche des Ansatzes i auf, oder aber auf dem oberen Querschnitt des Toise-Maßstabes. In beiden Fällen ließ man die Kugeln in gleicher Höhe hinabhängen. Eine am unteren Ende der Schiene angebrachte Mikrometerschraube ermöglichte es schließlich, den Höhenunterschied in beiden Fällen genau zu ermitteln, so daß sich die Längendifferenz in beiden Fällen einfach gleich der Summe aus einer Toise und dem durch das Mikrometer angezeigten Höhenunterschied ergab. Das obere Ende der Fäden ließ Bessel von einem Kreiszylinder von geringem Radius sich abwickeln.

Zum Schutze gegen Luftströmungen und Temperaturänderungen wurde, wie die Abbildung des Apparates in Fig. 203 zeigt, der Apparat in einen Schutzkasten eingeschlossen. An diesem war eine Vorrichtung angebracht, um das Pendel von außen her in Schwingungen versetzen zu können. Um auch den Einfluß der Temperatur genau berücksichtigen zu können, waren innerhalb des Schutzkastens noch fünf Thermometer angebracht.

§ 175. Das Mitschwingen des Pendelstativs.

Der periodische Wechsel des von einem schwingenden Pendel ausgeübten Horizontaldruckes vermag das Stativ oder die Unterlage des Pendels in Mitschwingen zu versetzen, was die Ursache bedeutender Störungen der Messungsergebnisse werden kann. Eingehende Untersuchungen hat hierüber zuerst Peirce (1877) angestellt*).

Die theoretische Behandlung dieses störenden Einflusses gründet sich im wesentlichen auf eine Formel, die die durch das Mitschwingen verursachte Korrektur der reduzierten Pendellänge in eine Beziehung bringt zu derjenigen Verschiebung (l'_s), die das Pendellager unter

---

*) Verhandlungen der allgemeinen Konferenzen der europäischen Gradmessung, Stuttgart 1877, S. 142; ferner U. S. Survey 1881, App. 14. — Übrigens haben bereits Huygens (1665) und Ellicott (1739) die Wahrnehmung gemacht, daß zwei an derselben Wand hängende Uhren den gleichen Gang annehmen. — Eingehender wurde diese Erscheinung später von Savart (1839) untersucht und von Poisson und Résal theoretisch behandelt.

einem Horizontaldruck von der Größe Eins erfährt. Nach dieser Formel ist nämlich

$$\Delta l = \frac{mga}{\varepsilon l}, \tag{235}$$

wenn a den Schwerpunktsabstand von der Drehachse bedeutet.

Die Konstante ε wird experimentell bestimmt, was entweder mittels statischer oder mittels dynamischer Methoden möglich ist. Bei der statischen Methode wird auf das Lager durch Gewichte ein seitlicher Zug von bekannter Größe ausgeübt und die dadurch verursachte Verschiebung mittels Fühlhebel und Spiegel, allenfalls auch unter Benutzung optischer Interferenzen gemessen*).

Unter den dynamischen Methoden kommt zunächst die unmittelbare mikroskopische Beobachtung der Bewegung des Stativs in Betracht**), ferner das sogenannte Wippverfahren, bei dem dem Stativ oder Lager Stöße von gemessener Stärke im Takte der Pendelschwingungen erteilt werden. Ist α der Ausschlag, den das anfangs ruhende Pendel durch n Stöße von einer Stärke von je W Kilogramm erhält, so ist

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2}\,\frac{4n-1}{4l\alpha}\,Wg. \tag{236}$$

Die Stärke der Stöße wird dabei am einfachsten mittels eines Dynamometers gemessen, indem man mit diesem die Stöße — und zwar in der Höhe der Schneide — ausführt***).

Die genauesten Ergebnisse werden indessen erhalten, wenn man auf dem Lager oder am Stativ ein zweites Pendel als Hilfspendel schwingen läßt, wobei dessen Schwingungsdauer mit der des Beobachtungspendels gleich gemacht wird. Durch die Schwingungen dieses Hilfspendels kann ein Ausschlag des Beobachtungspendels herbeigeführt werden, aus dessen Größe die Konstante ε ermittelt werden kann†).

Zwischen den statisch und den dynamisch gefundenen Werten besteht allerdings keine völlige Übereinstimmung; doch müssen

---

*) Vgl. E. Plantamour, Verhandlungen der allgemeinen Konferenzen der europäischen Gradmessung, Stuttgart 1877, Anhang. — Ch. Defforges, Journal de physique 7 (1888), p. 358. — H. Nagaoka, Journal of the College of Science, University Tokyo, 16 (1902), p. 20.

**) Vgl. z. B. Oppolzer in den Verh. d. allg. Konf. d. europ. Gradmessung, Stuttgart 1877.

***) R. Schumann, Astronom. Nachrichten 140 (1896), p. 257, und vor allem: Helmert, Beiträge zur Theorie des Reversionspendels, Veröffentlichungen des Preuß. Geodät. Instituts, Potsdam 1898.

†) Vgl. hierzu Ph. Furtwängler, Berliner Berichte 1902, S. 245.

die dynamischen Werte als die richtigen angesehen werden. Es sei schließlich auch darauf hingewiesen, daß nicht bloß elastische Schwingungen des Stativs und des Lagers eine Rolle spielen, sondern auch unelastische Kippbewegungen des Lagers auftreten, deren Störungen man durch die früher angegebene Formel (Gl. 235) nur näherungsweise darstellen kann.

§ 176. Der Einfluß der Elastizität und der Temperatur.

Bei einem Fadenpendel ist im allgemeinen der Einfluß der Elastizität des Fadens so gering, daß er selbst bei feinen Messungen nicht berücksichtigt zu werden braucht. Von größerer Bedeutung ist dieser Einfluß nur bei den später zu besprechenden Reversionspendeln, wovon im Zusammenhang mit diesen noch die Rede sein soll.

Was die Abhängigkeit von der Temperatur betrifft, so ist die dadurch bedingte Korrektur der reduzierten Pendellänge jedesfalls proportional dem Temperaturunterschied. Die Wärmeausdehnung hat zur Folge, daß jedes Pendel in der Hitze langsamer, in der Kälte rascher als bei normaler Temperatur schwingt. Es ist zweckmäßiger, die für die Reduktion auf Normaltemperatur wesentlichen Konstanten experimentell durch Beobachtungen bei verschiedenen Temperaturen zu ermitteln, als sie aus dem Ausdehnungskoeffizienten der Pendelsubstanz zu errechnen.

Von großer Wichtigkeit ist es, daß Temperaturschwankungen bei den Pendelbeobachtungen so sehr vermieden werden, als dies nur möglich ist. Beobachtungsfehler könnten sonst dadurch entstehen, daß das Pendel und das Thermometer nicht gleich rasch auf Temperaturänderungen reagieren. Allerdings hat man andererseits, um derartige Beobachtungsfehler zu vermeiden, besondere Thermometer konstruiert. Zweckmäßig ist es auch, das Thermometer an einem Metallstück anzubringen, dem man dieselbe Größe und Gestalt wie dem Pendelkörper gibt. Bei größeren Temperaturänderungen muß zur Korrektur der reduzierten Pendellänge die Formel benutzt werden

$$\Delta l = \alpha + \beta \frac{d\vartheta}{dt}, \tag{237}$$

wobei ϑ die Temperatur bedeutet und α und β zwei experimentell zu bestimmende Konstanten sind.

Bei genauen Messungen muß auch die Höhenschichtung der Temperatur berücksichtigt werden. Wenn dann für die Temperatur deren Mittelwert eingesetzt wird, ist noch eine weitere

kleine Korrektur vorzunehmen, die Peirce*) und Helmert**) ermittelt haben, die jedoch kaum je mehr als einige Zehntel Mikron ausmacht.

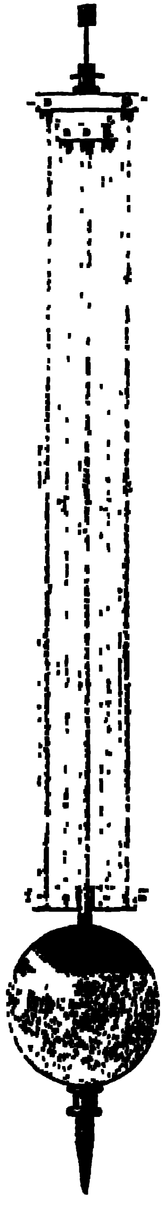


Fig. 204. Rostpendel.

§ 177. Das Kompensationspendel.

Der Einfluß, den die Temperatur auf die Schwingungsdauer eines Pendels hat, läßt sich in einem Ausmaß, das zwar nicht für Schwerebestimmungen, wohl aber für die praktische Verwendung als Uhrpendel ausreicht, durch geeignete Kompensationen beseitigen. Auf diesem Prinzip beruht das von Harrison im Jahre 1726 erfundene Rostpendel (Fig. 204). Zwei Querstäbe ab und fg sind im Rostpendel durch zwei Eisenstäbe R miteinander verbunden. Der untere Querstab trägt ferner zwei Stabe T aus Zink, die an ihren oberen Enden durch einen dritten Querstab cd miteinander verbunden sind. An diesem Querstab ist nun wiederum ein Eisenstab S befestigt, der an seinem unteren Ende die eigentliche Pendellinse trägt.

Bei einer Temperaturerhöhung wird durch die Ausdehnung der drei Eisenstäbe die Linse gesenkt, hingegen durch die Verlängerung der beiden Zinkstäbe gehoben. Da Eisen und Zink einen verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten haben, ist es bei geeigneter Wahl der Längen der drei Stäbe stets möglich, die erwähnte Senkung der Pendellinse ihrer Hebung gleich zu machen, so daß die Pendellänge praktisch von der Temperatur unabhängig wird.

Bei einer anderen Art von Kompensationspendeln, den sogenannten Quecksilberpendeln, wird der Ausgleich dadurch bewerkstelligt, daß der Pendelkörper aus einem teilweise mit Quecksilber gefüllten Gefäß besteht. Die Senkung der festen Teile des Pendels wird dann durch die Hebung des Quecksilbers kompensiert.

*) U. S. Survey 1885, App. 17, p. 509.

**) Beiträge zur Theorie des Reversionspendels, S. 92.

§ 178. Das Prinzip des Reversionspendels.

Wie schon in einem früheren Abschnitt (§ 100) gezeigt wurde, sind zwei zu verschiedenen Seiten des Schwerpunktes ungleich weit liegende Punkte eines physischen Pendels, wofern um sie das Pendel mit derselben Periode schwingt, voneinander um die reduzierte Pendellänge entfernt, die den betreffenden, miteinander vertauschbaren Aufhängungen entspricht. Hat man also durch Ausprobieren zwei derart zusammengehörige Punkte ermittelt, durch die man parallele Schneiden legt, so ist für Schwingungen um eine der Schneiden die reduzierte Pendellänge einfach gleich dem Schneidenabstand.

Bei der Verwendung eines derartigen, als Reversionspendel bezeichneten Pendels kann also die reduzierte Länge genau ermittelt werden, ohne daß Trägheitsmomente oder Schwerpunktsabstände bestimmt werden müßten und ohne daß es erforderlich wäre, die störenden Einflüsse der Aufhängung zu berücksichtigen.

Die älteste Konstruktion eines Reversionspendels stammt von dem Engländer Kater*) (1818), der damit, allerdings ohne es zu wissen, ältere Ideen von Prony**) (1792) und Bohnenberger***) (1811) zur Ausführung brachte.

Das von Kater konstruierte Reversionspendel†) (Fig. 205) bestand aus einer prismatischen Messingstange, die in einer Entfernung von 1 Meter mit zwei Öffnungen für die Lager zweier, einander zugekehrter Schneiden (a und b) versehen war. Die Stange trug unten ein festes, linsenförmiges Messinggewicht von etwa 1 kg, außer diesem noch ein kleineres, verschiebbares und festschraubbares Gewicht v und endlich ein Laufgewicht w, das längs

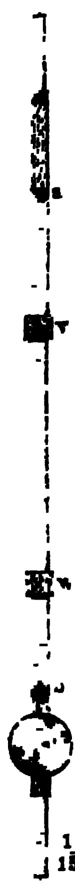


Fig. 205. Das Katersche Pendel.

---

*) An account of Experiments for determining the Length of the Pendulum vibrating Seconds in the Latitude of London. Phil. Trans. 108 (1818).

**) Prony teilte die Idee des Reversionspendels der Pariser Akademie bereits 1792 mit; doch blieb seine Abhandlung unbekannt und wurde erst viel später, als sie nur mehr rein historisches Interesse hatte, veröffentlicht.

***) J. Bohnenberger, Astronomie, Tübingen 1811.

†) Der Name „Reversionspendel" ist allerdings erst später (1825) von Schuhmacher eingeführt worden.

einer Skala mittels einer Mikrometerschraube verstellbar war und der Herstellung völliger Gleichheit der Schwingungszeiten dienen sollte.

§ 179. Die Angleichung der Schwingungszeiten.

Es wäre äußerst umständlich und ungemein mühsam, wollte man ein Reversionspendel so justieren, daß es um beide Schneiden in der Tat mit völlig gleicher Periode schwingt. Wie bereits Bohnenberger gezeigt hat, ist dies auch keineswegs erforderlich; es genügt, wenn man die beiden Schwingungszeiten einander bis auf eine kleine Differenz gleich gemacht hat.

In diesem Falle ermöglichen es Näherungsformeln, aus den beobachteten Schwingungszeiten, die den beiden Schneiden entsprechen, ferner aus den bekannten Abständen der beiden Schneiden vom Schwerpunkt, aus dem Volumen und der Masse des Pendels sowie aus der Lage seines Volumschwerpunktes diejenige Schwingungszeit zu ermitteln, die einem mathematischen Pendel von der Länge des Schneidenabstandes zukommt. Eine besonders einfache Gestalt nehmen diese Näherungsformeln dann an, wenn der Unterschied der Schwingungszeiten um die beiden Schneiden höchstens etwa ein Zehntel Promille beträgt. Dann kann die besonders bequeme Näherungsformel angewendet werden

$$\tau = \tau_1 + (\tau_1 - \tau_2)\frac{s_2}{s_1 - s_2}, \tag{238}$$

wobei s_1 und s_2 die Abstände der beiden Schneiden vom Schwerpunkt und τ_1 und τ_2 die Schwingungszeiten um die beiden Schneiden sind, von denen die Größe τ natürlich ebenfalls nur ganz wenig abweicht. Da das Korrektionsglied (das letzte Glied der Gl. 238) in dem betrachteten Fall nur sehr klein neben τ_1 ist, so braucht auch das Verhältnis s_2/s_1 nicht besonders genau ermittelt zu werden.

§ 180. Das symmetrische Reversionspendel.

Um außer dem Einfluß der Aufhängung auch den der Luft eliminieren zu können, muß man dem Reversionspendel eine symmetrische Form geben, während jedoch andererseits der Schwerpunkt natürlich nicht in die Mitte zwischen die beiden Schneiden fallen darf. Bessel brachte deshalb an den Enden des Pendels zwei Gewichte von gleicher zylindrischer Form und gleicher Größe an, von denen das eine massiv und das andere hohl war. Da bei den Schwingungen um beide Achsen dann die aerostatische und ebenso die aerodynamische Reduktion gleich groß sind, so erscheint der störende Einfluß der Luft beseitigt.

Eine weitere Verbesserung nahm Defforges (1894) vor, indem er die beiden Gewichte in das Innere der Pendelstange verlegte, wodurch noch vollkommenere Symmetrie der äußeren Form erreichbar wird*).

Ein symmetrisches Reversionspendel etwas älterer Konstruktion ist in Fig. 206 dargestellt; es wurde nach Ideen von G. Neumayr und Peters 1860 durch Lohmeier verfertigt**). Es bestand aus einer Messingstange, die in der Mitte ein festes Gewicht (M) und überdies in gleichen Abständen hiervon zwei weitere, nicht verschiebbare Linsen (G_1 und G_2) trug, von denen eine massiv und eine hohl war. Zur Herstellung möglichst gleicher Schwingungsdauer ließen die Konstrukteure des Pendels an beiden Enden (bei A und B) Messingstreifen stehen, die sie sodann symmetrisch verkurzten, um den Unterschied der beiden Schwingungszeiten immer geringer zu machen. Derart gelang es, die Schwingungsdifferenz bis auf 0,00024 Sekunden zu verkleinern, womit die Möglichkeit erreicht war, die Gl. 238 anzuwenden. Um ein Mitschwingen der Unterlage möglichst auszuschließen, wurde das Pendel auf einer Konsole aufgehängt, die ihrerseits wieder in dem Beobachtungsraum angemauert war.

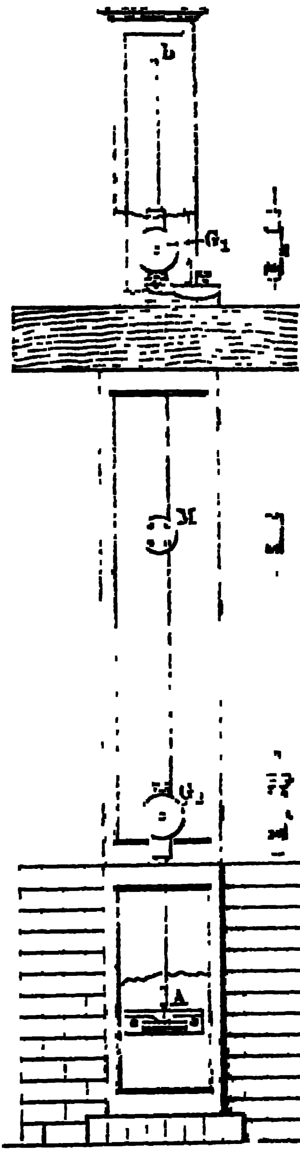


Fig. 206. Lohmeiersches Reversionspendel.

Für Reiseapparate mußten natürlich andere Arten der Aufhängevorrichtung gewählt werden, um die Apparate leicht transportabel zu machen. Ein hierfür besonders geeignetes Stativ, das zugleich die Auflageplatte für das Pendel und den für die Längenmes-

*) Vgl. § 183.

**) Das Pendel diente zur Bestimmung der Fallbeschleunigung in Melbourne.

sungen benutzten Komparator samt Maßstab trägt, wurde von Repsold konstruiert; es ist in Fig. 207 dargestellt. Bei diesem Stativ tritt allerdings ein recht beträchtliches Mitschwingen ein.

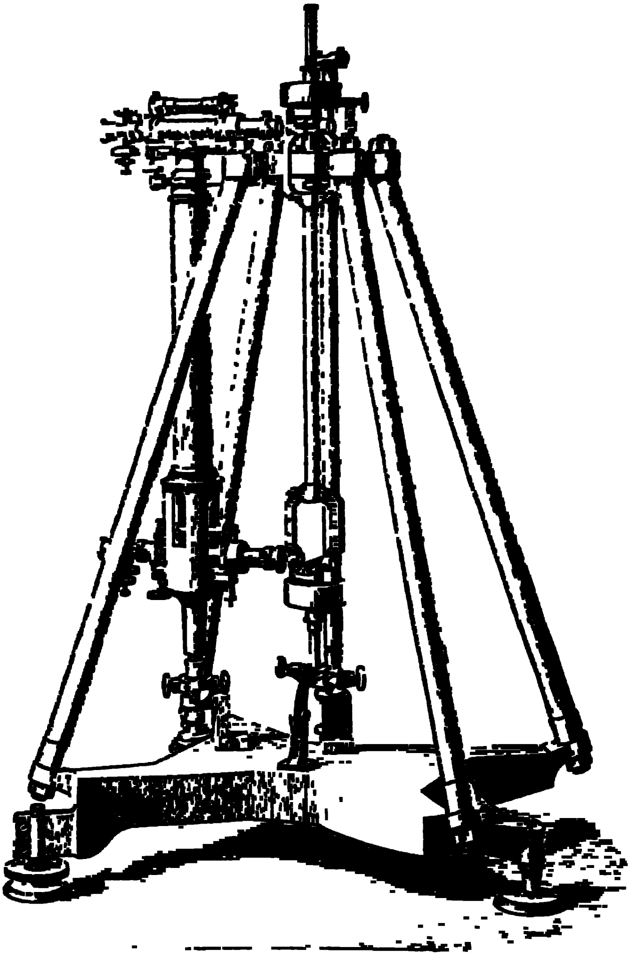


Fig. 207. Der Pendelapparat von Repsold.

§ 181. Die Bestimmung des Schneidenabstands.

Außer der Schwingungsdauer muß bei einem Reversionspendel eigentlich nur noch der Schneidenabstand gegeben sein, wenn die Schwerebeschleunigung aus den Pendelbeobachtungen ermittelt werden soll*). Die genaue Messung des Schneidenabstandes ist

*) Dabei ist allerdings vollkommene Übereinstimmung der beiden Schwingungszeiten angenommen.

daher für alle Pendelbeobachtungen von größter Wichtigkeit. Gewöhnlich erfolgt die Messung derart, daß der Schneidenabstand in einem Vertikalkomparator mit einem Maßstab verglichen wird. Eine nicht vernachlässigbare Rolle spielt bei diesen Messungen die Art der Beleuchtung der Schneiden. Wie schon Kater fand, ist das Ergebnis der Messung verschieden, je nachdem, ob helle Schneiden auf dunklem Grund oder dunkle Schneiden auf hellem Grund beobachtet werden. Die Ursache liegt teils in Irradiationserscheinungen, teils in dem Umstande, daß bei verschiedener Beleuchtung die Reflexion des Lichtes von verschiedenen Teilen der Schneiden ausgeht. Zweckmäßig wird darum die Beleuchtung so eingerichtet, daß Helligkeitsunterschiede zwischen den Schneiden und dem Hintergrund tunlichst vermieden werden*).

Zur Umgehung der angegebenen Schwierigkeiten kann man auch, statt die Schneiden mit dem Pendel zu verbinden, sie fest gestalten, und auf diesen festen Schneiden ebene Flächen schwingen lassen, die mit dem Pendel verbunden sind**).

Für sehr genaue Messungen muß schließlich auch noch berücksichtigt werden, daß der vertikal gestellte Maßstab durch sein eigenes Gewicht eine Verkürzung erfahrt. Auch spielt eine gewisse Rolle der Umstand, daß der Schneidenabstand nach der Reversion infolge der eingetretenen Dehnung nicht genau derselbe ist wie vor der Reversion. Immerhin kann der Schneidenabstand mit einer Fehlergrenze von etwa 1 Mikron gemessen werden.

§ 182. Die besonderen Fehlerquellen der Reversionspendel.

Obwohl die ärgsten Fehlerquellen des Fadenpendels bei dem Reversionspendel vermieden sind, so treten doch wiederum (wenn auch in viel geringerem Grade) bei dem Reversionspendel andere spezielle Fehlerquellen auf, die bei exakten Messungen berücksichtigt und durch geeignete Vorkehrungen und Kunstgriffe tunlichst beseitigt werden müssen.

Derartige Fehlerquellen können sich zunächst dann ergeben, wenn die wesentlichen geometrischen Voraussetzungen des Reversionspendels nicht vollkommen erfüllt sind; hierzu gehören Parallelismus der Drehachsen, Zusammenfallen des Schwerpunktes und der Ebene der beiden Drehachsen, genau horizontale Stellung der Unterlage und bei den modernen Apparaten vollkommene Symmetrie der äußeren Gestalt.

*) Vgl. hierzu F. R. Helmert, Beiträge zur Theorie des Reversionspendels, Veröff. d. Preuß. geodät. Inst., Potsdam 1898.

**) Ein derartiges Pendel wurde zuerst von Baily (1832) konstruiert.

Indem man mit den Drehachsen Spiegelvorrichtungen verbindet, kann man den Parallelismus der beiden Drehachsen prüfen und eventuell festgestellte Abweichungen beseitigen. Auch bietet es keine besonderen Schwierigkeiten, etwaige Abweichungen des Schwerpunktes von der Drehachsenebene beliebig zu verringern. Im übrigen genügt es, wenn das Quadrat der Abweichung neben den Quadraten der Entfernungen zwischen Schwerpunkt und den beiden Achsen vernachlässigt werden darf. Daß die Fläche der Unterlage keine Neigung aufweisen darf, ist deshalb wichtig, weil sonst, wenn auch freilich in minimalem Ausmaß, die früher besprochene Erscheinung des Machschen Pendels zutage treten müßte.

Weitere Fehlerquellen erscheinen dadurch bedingt, daß im allgemeinen wohl die beiden Schneiden eine verschiedene Krümmung aufweisen. Am einfachsten wird diese Fehlerquelle beseitigt, indem man, gemäß einem schon von Bessel gemachten Vorschlag, die beiden Schneiden vertauscht. Noch besser ist es, statt der Schneiden die Gewichte zu vertauschen, und am zweckmäßigsten, wenn diese Vertauschung (wie bei dem später zu besprechenden Apparat von Defforges) im Inneren des Pendelmantels vorgenommen werden kann, weil hierdurch wiederum Fehlerquellen vermieden werden, die von dem Einfluß der umgebenden Luft herrühren.

Durch die Elastizität kann sich die Notwendigkeit von Korrektionen ergeben, die auch bei ganz steifen Pendeln einen Betrag von einigen Mikron erreichen können, bei stark biegsamen Pendeln aber unter Umständen fast ein Drittel Millimeter ergeben. Als Quelle möglicher Fehler sei schließlich noch der Erdmagnetismus genannt; seinetwegen vermeidet man Stahl bei den Pendelapparaten und stellt sie meistens aus Messing her.

§ 188. Die Kombination zweier Reversionspendel.

Die in dem letzten Abschnitt besprochenen speziellen Fehlerquellen des Reversionspendels lassen sich, wenigstens soweit sie von dem Mitschwingen der Aufstellung, und teilweise auch, soweit sie von den Schneiden herrühren, eliminieren, wenn man zwei Reversionspendel miteinander kombiniert. Dies hat zuerst Oppolzer*) getan, indem er zwei Pendel von gleicher Länge und verschiedener Masse benutzte. Sind m_1 und m_2 die Massen der beiden Pendel, und sind L_1 und L_2 die Werte, die

*) Vgl. Oppolzer, *Zeitschr. f. Instrumentenkunde*, 4 (1884), S. 303 und 379.

man mittels ihrer für die Länge des Sekundenpendels ermittelt hat.

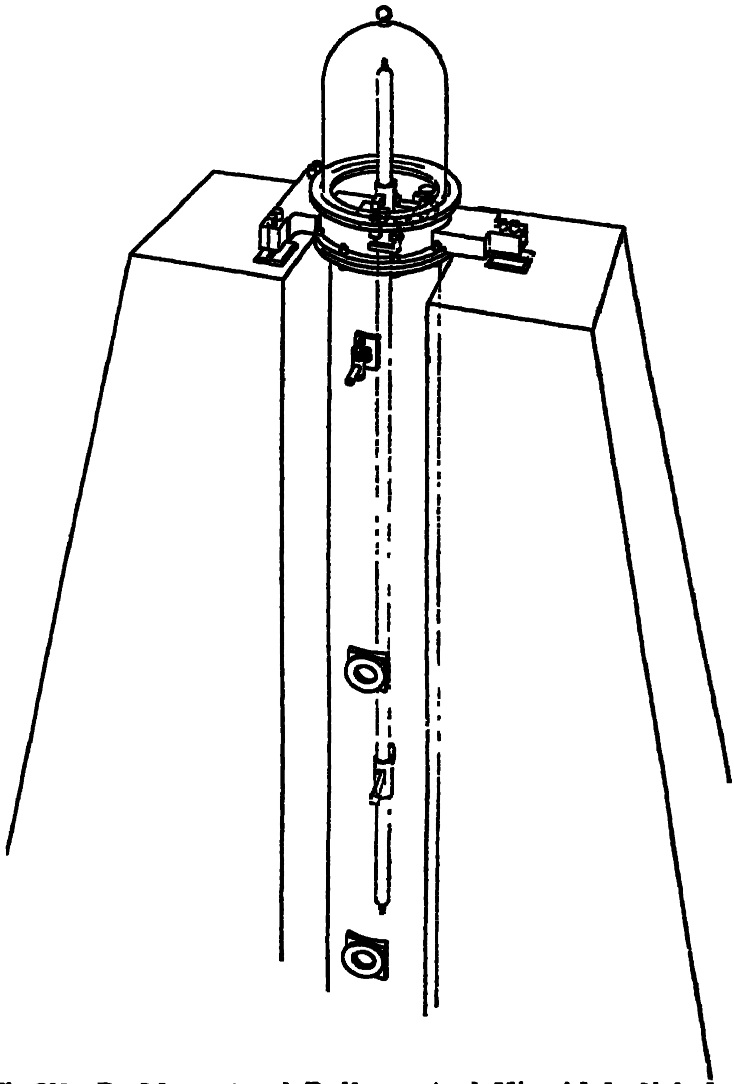


Fig. 208. Pendelapparat nach Defforges (nach Mémorial du dépôt de la guerre, Tome XV).

so erhält man nach Oppolzer die wahre Länge L^* des Sekundenpendels mittels der Beziehung

$$L^* = L_1 + \frac{m_1}{m_2 - m_1}(L_1 - L_2). \tag{239}$$

Noch zweckmäßiger als das Oppolzersche Verfahren ist das

von Defforges*) ersonnene, bei dem zwei Pendel von gleicher Masse und verschiedener Länge benutzt werden; diese Methode hat nämlich den Vorteil, daß bei ihr auch ein konstanter Fehler der Längenmessung eliminiert wird. Werden wieder mit L_1 und L_2 die Werte bezeichnet, die man mittels der beiden Pendel für die Länge des Sekundenpendels gefunden hat, und sind Δ_1 und Δ_2 die Schneidenabstände der beiden Pendel, so gilt für die wahre Länge L^* des Sekundenpendels nach Defforges die Beziehung

$$L = L_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_2}(L_1 - L_2). \tag{240}$$

Ein zu solchen Messungen nach Angaben von Defforges konstruierter Apparat ist in Fig. 208 dargestellt. An einem Gehäuse sind in den Höhen der unteren Enden der beiden Pendel Gucklöcher für die Beobachtungen angebracht. Das Pendel selbst besteht aus einem einfachen Messingrohr, dessen Enden durch Deckel in Halbkugelform abgeschlossen sind, und die an ihrer Außenseite nur die Schneidenvorrichtungen tragen. Die Auflageplatte ist an zwei massiven Pfeilern befestigt, so daß das Pendel zwischen diesen Pfeilern schwingt. Die Massen selbst befinden sich im Innern des Messingrohrs.

Siebzehntes Kapitel.

Die Kreiselbewegung.

§ 184. Nutation und Präzession.

Ein besonders interessanter Sonderfall einer Bewegung eines starren Körpers wird durch die sogenannte Kreiselbewegung dargestellt. Im engeren Sinne des Wortes versteht man darunter eine mit großer Winkelgeschwindigkeit erfolgende Rotation eines starren Körpers um eine freie Achse, wobei ein Punkt der Achse festgehalten ist und der Kreisel dem Einfluß seiner Schwere unterliegt. Bei der Definition im weiteren Sinne wird entweder von der Forderung der Fixierung eines Punktes oder von dem Einfluß der Schwere oder von beidem abgesehen.

Die exakte Theorie der Kreiselbewegung stellt eines der schwierigsten und verwickeltesten Kapitel der theoretischen Mechanik dar. Bezüglich ihrer muß auf das moderne Standard-Werk von Klein und Sommerfeld**) verwiesen werden, während in diesem

*) Defforges, Observations du pendule, Mémorial du dépôt général de la guerre, 15 (1894).

**) F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1897 ff.

Buche nur die wichtigsten, experimentalphysikalisch bedeutsamen Ergebnisse der Theorie und an einer späteren Stelle die Theorie eines einfachen Spezialfalles besprochen werden sollen.

Betrachten wir einen *symmetrischen*, in einem Punkte der Symmetrieachse festgehaltenen schweren Kreisel, der um seine Symmetrieachse (die natürlich eine freie Achse darstellt) rotiert, so läßt sich die jeweilige Lage der Achse durch Angabe *zweier Winkel* bestimmen. Der eine Winkel gibt die *Neigung der Achse gegen die Vertikale* an, der zweite Winkel ist derjenige, den eine durch die Achse gelegte *Vertikalebene* mit einer irgendwie gewählten *festen* vertikalen *Ebene* einschließt.

Der *Neigungswinkel* gegen die Vertikale *schwankt* nun (wie eine später wiederzugebende Ableitung zeigt) periodisch zwischen einem kleinsten und einem größten Werte. Die Schwankungen sind um so geringer und um so schneller, je größer die Umdrehungsgeschwindigkeit des Kreisels ist. Die periodischen Änderungen des Neigungswinkels werden als *Nutation* des *Kreisels* bezeichnet.

Andererseits *dreht* sich auch beständig die durch die Kreiselachse gelegte *Vertikalebene* gegenüber einer im Raume festen Ebene; die hierdurch bedingte drehende Bewegung wird die *Präzession* des Kreisels genannt. Die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung unterliegt *periodischen Schwankungen* zwischen dem Nullwert und einem Maximalwert: die Schwankungen erfolgen um so rascher und in um so geringerem Ausmaß, je rascher der Kreisel rotiert. Von dem Neigungswinkel ist die Winkelgeschwindigkeit der Präzession unabhängig. Die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Prazession nimmt mit wachsender Tourenzahl des Kreisels ab.

Der *Sinn der Präzessionsbewegung* ist durch die Regel bestimmt, daß sich der Vektor der Umdrehungsgeschwindigkeit des Kreisels der Richtung desjenigen Vektors zu nähern sucht, der das von der Schwerkraft ausgeübte Drehmoment darstellt. Gemäß der allgemeinen Definition ist dabei der erste Vektor natürlich so zu konstruieren, daß von seiner Spitze gesehen, die Rotation des Kreisels entgegen dem Uhrzeiger erfolgt, und das Analoge gilt selbstverständlich nach der schon öfter erwähnten konventionellen Regel von dem zweiten Vektor; auch ihm ist ein solcher Richtungssinn zu geben, daß von seiner Spitze gesehen, die durch die Schwerkraft angestrebte Drehung entgegen dem Uhrzeiger verläuft.

Was für die Schwerkraft gilt, gilt übrigens in analoger Weise

für jeden dem Kreisel erteilten Impuls. Wirkt von außen her eine störende Kraft, die die Richtung der Kreiselachse zu ändern sucht, so wird die Achse senkrecht zu der Richtung der störenden Kraft verschoben.

§ 185. Beispiele von Kreiselbewegungen.

Die wichtigsten Typen der Bewegung eines symmetrischen schweren Kreisels können am einfachsten unterschieden werden, je nachdem, ob sich der Schwerpunkt des Kreisels oberhalb oder unterhalb des festen Punktes bzw. der Unterlage befindet, und je nachdem ob die Bewegung mit oder ohne seitlichen Impuls vor sich geht.

Eine Kreiselbewegung, bei der sich der Schwerpunkt (wie dies bei Spielkreiseln üblich ist) oberhalb der Unterlage befindet, ist in

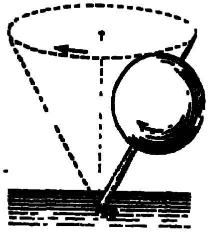


Fig. 209.

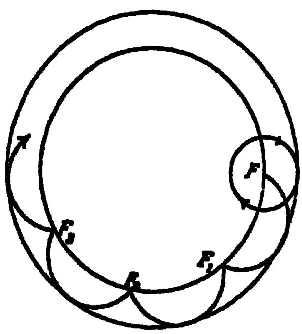


Fig. 211.

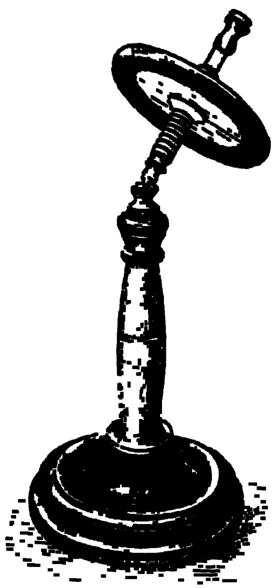


Fig. 210.

Fig. 209 dargestellt; ein allgemein bekannter Apparat, der eine solche Bewegung ermöglicht, ist in Fig. 210 wiedergegeben. Die Kurve, die bei einer derartigen Bewegung durch das obere Ende der Kreiselachse beschrieben wird, ist in Fig. 211 dargestellt. Sie verläuft zwischen zwei konzentrischen Kreisen, die den Grenzwerten des Neigungswinkels entsprechen. Der Sinn der Kreiselrotation ist durch den um den Punkt F konstruierten Kreis wieder-

gegeben. Befindet sich der Schwerpunkt oberhalb des Stützpunktes, so verläuft die Präzessionsbewegung in demselben Sinn wie die Rotation. Wofern ein seitlicher Impuls fehlt, bildet die Kurve auf dem inneren Kreis Spitzen. Mit zunehmender Tourenzahl erweitert sich der Abstand der beiden konzentrischen Kreise.

Ein Apparat, bei dem der Schwerpunkt unterhalb des

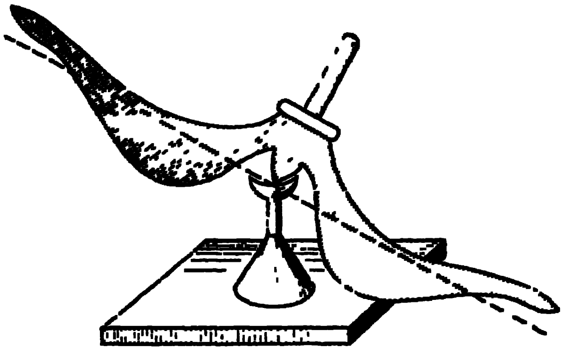


Fig. 212.

Stützpunktes liegt, ist schematisch in Fig. 212 dargestellt. Auch in diesem Sonderfall beschreibt das obere Ende der Kreiselachse (F in Fig. 213) eine Kurve, die zwischen zwei konzentrischen Kreisen verläuft, jedoch derart, daß die Präzessionsbewegung in

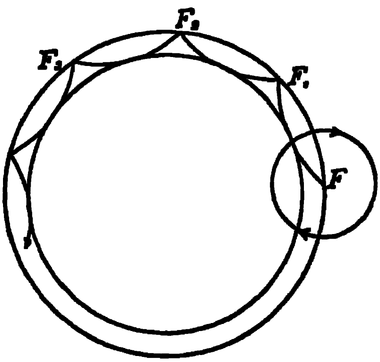


Fig. 213.

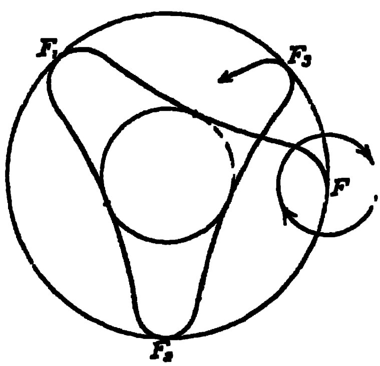


Fig. 214.

entgegengesetztem Sinne wie die Rotation erfolgt und (bei dem Fehlen eines seitlichen Impulses) die Spitzen den äußeren Kreis berühren (Fig. 213). Mit abnehmender Tourenzahl wird der Abstand der beiden Kreise größer. Den Verlauf der Kurve bei dem Vorhandensein eines seitlichen Impulses zeigt die Fig. 214.

Anstatt einen Kreisel aufzustellen, kann man ihn natürlich auch

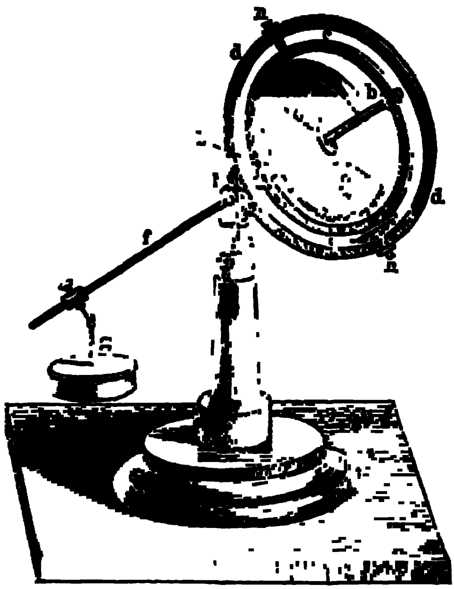


Fig. 215. Gyrostat.

aufhängen und hierbei auch wiederum die andere Seite ausbalancieren. Indem man bei einem derartigen Apparat schließlich noch eine Cardanische Aufhängung*) anbringt, erhält man einen sogenannten Gyrostaten (Fig. 215), der sich besonders zum experimentellen Studium der Präzessionserscheinungen eignet**). Um die Bahnkurven aufzuzeichnen, versieht man das Ende der Kreiselachse mit einem Schreibstift oder zum Zwecke der photographischen Registrierung mit einem kleinen Spiegel.

§ 186. Kreiselexperimente.

Die auffälligste Eigentümlichkeit eines Kreisels ist die scheinbare Stabilität seiner Rotation, und hierauf gründen sich auch

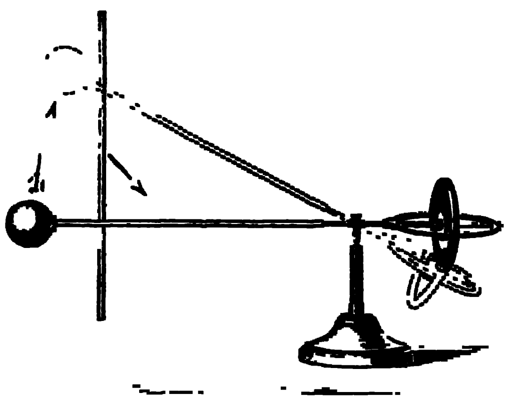


Fig. 216.

die am besten bekannten und einfachsten Kreiselexperimente. Ein genügend rasch rotierender Kreisel fällt nicht um, obwohl sich

*) Vgl. § 158.

**) Vgl. John Perry, Drehkreisel, 2. deutsche Auflage, Leipzig (Teubner) 1913.

sein Schwerpunkt oberhalb der Stützfläche befindet. Ja er fällt selbst dann nicht um, wenn man etwa mittels eines Stabes Schläge gegen seine Achse führt. Schließt man den Kreisel in eine Hohlkugel ein, so fühlt man, wenn man den Kreisel in rasche Rotation versetzt hat, einen starken Widerstand bei jedem Versuche einer Drehung der Kugel, ein Experiment, das natürlich besonders einen

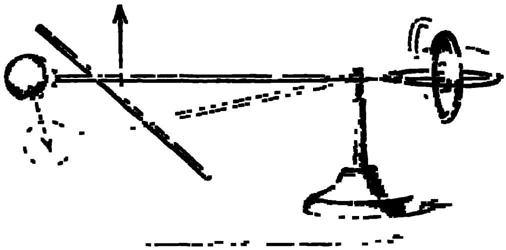


Fig. 217.

Zuseher verblüffen muß, der nichts von dem verborgenen Kreisel weiß.

Daß, wie schon erwähnt wurde, jeder störende Impuls die Achse senkrecht verschiebt, läßt sich sehr hübsch mittels eines Apparates von der in Fig. 216 wiedergegebenen Art zeigen, wobei der Kreisel durch ein Gegengewicht ausbalanciert ist. Schiebt man mittels eines Stabes das Gegengewicht etwas nach vorne oder hinten, so

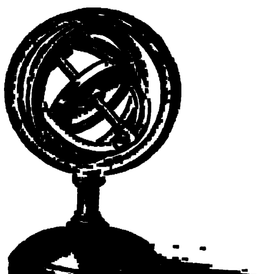


Fig. 218.

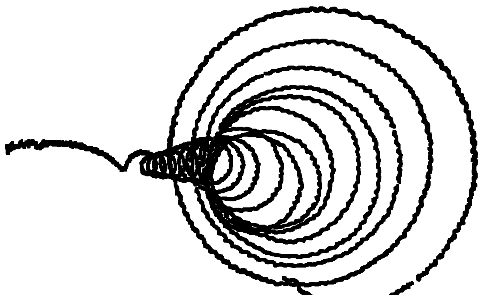


Fig. 219.

geht je nach der Rotationsrichtung der Kreisel nach oben oder unten. Schiebt man dagegen mit horizontal gehaltenem Stabe das Gewicht ein klein wenig hinauf oder hinunter, so nimmt man wahr, daß sich der Kreisel nach vorne oder nach hinten bewegt (Fig. 217).

Mittels eines in einer Cardanischen Aufhängung befestigten Kugelkreisels läßt es sich, wofern das Gegengewicht weggelassen wird, zeigen, daß bei genügend rascher Rotation die Achse stets

sich selbst parallel bleibt, wie immer auch der Apparat selbst gedreht werden mag (Fig. 218)*).

Setzt man einen frei beweglichen Kreisel schief auf eine rauhe Unterlage auf, so richtet er sich bei genügend rascher Rotation stets auf. Gleitet der Kreisel auf der Unterlage, so beschreibt das untere Ende merkwürdige regelmäßige Kurven, wofür Fig. 219 (nach Sommerfeld) ein Beispiel gibt.

§ 187. Der Kreisel als Stabilisator.

Das eigentümliche Beharrungsvermögen des Kreisels, das sich in der Beibehaltung der Rotationsachse gegenüber störenden Einflüssen äußert, kann zur Stabilisierung von Systemen verwendet werden, die ohne Einfugung des Kreisels entweder nur eines labilen Gleichgewichtes oder einer bloß geringen Stabilität fähig wären.

Ersteres ist beispielsweise bei Fahrrädern und ferner bei der sogenannten Einschienenbahn der Fall, die bisher allerdings noch keine Verbreitung finden konnte. Bei ihr wird die Stabilisierung des Fahrzeuges, dessen Schwerpunkt natürlich über der Schiene liegt und das daher ohne Stütze umfallen müßte, durch einen eingebauten Kreisel versucht, den man durch einen Elektromotor in rascher Rotation erhält. Auch zur Lenkung von Torpedos werden eingebaute Kreisel verwendet, und viele Versuche sind auch bereits unternommen worden, um durch Kreisel die Stabilität von Flugzeugen zu erhöhen.

Bei dem Werfen scheibenförmiger Körper erreicht man eine Stabilisierung der Richtung, indem man dem Körper vor dem Abwurf eine genügend rasche Eigendrehung erteilt. Dadurch verhindert man es, daß der Luftwiderstand, wie es sonst sein Bestreben ist, den in der Richtung der Scheibenebene geworfenen Körper quer zu der Flugrichtung stellt, wodurch der Luftwiderstand vermehrt und somit die Wurfweite herabgemindert würde. Deshalb wird beispielsweise ein Diskus vor dem Abwurf in der Scheibenebene in rasche Umdrehung versetzt. Auf demselben Prinzip beruhen zahlreiche Artistentricks und unter anderem auch das unter dem Namen Diabolo bekannte Spielzeug. Daß dieses doppelkegelförmige Spielzeug, nachdem man es mittels einer Spielleine in rasche Rotation versetzt und dann in beträchtliche Höhe geschleudert hat, doch leicht wieder mit der Spielleine aufgefangen

---

*) Dieser Apparat wird häufig als Bohnenbergersches Maschinchen bezeichnet Wird dem Kreisel ein kleines Übergewicht aufgesetzt, so tritt indessen sofort eine Präzession ein.

werden kann, erklärt sich eben daraus, daß das Diabolo ohne Richtungsänderung wieder unten anlangt.

Ein Kreisel kann auch dazu dienen, um unerwünschte Schwingungsenergie eines Systems gewissermaßen zu „absorbieren". Dies kann dadurch bewerkstelligt werden, daß zunächst die Schwingungen mittels geeigneter Koppelung auf den Kreisel übertragen und dessen Schwingungen dann von dem System aus abgedämpft werden. Auf diesem Prinzip beruht der Schlicksche Schiffskreisel, durch den die bei Seegang auftretenden Rollbewegungen von Schiffen vermindert werden sollen.

Schließlich sei darauf hingewiesen, daß ein Kreisel auch als mittelbarer Stabilisator verwendet werden kann, indem er etwa automatisch eine geeignete Steuervorrichtung auslost oder auch nur die Lage eines Systems anzeigt und dadurch Aufschluß über notwendig gewordene Steuerungen gibt.

§ 188. Der Kreiselkompaß.

Denkt man sich einen dem Einfluß der Schwere durch Fixierung des Schwerpunkts entzogenen, also einen sogenannten astatischen Kreisel derart in einer Cardanischen Aufhängung befestigt, daß der außere Ring gegenuber der Erde festgehalten wird. dann kann sich die Figurenachse des Kreisels natürlich nur in einer gegenuber der Erde festen Ebene bewegen, und sie ist infolgedessen dann gezwungen, die tagliche Drehung einer solchen Ebene mitzumachen Auf einen derartigen Kreisel wirkt somit ein schwaches Drehmoment, das durch einen der Erdachse parallelen Vektor darstellbar ist.

Nun zeigt, wie schon erwähnt wurde, jeder Kreisel das Bestreben, seine Figurenachse in die Richtung des auf ihn wirkenden Momentvektors zu bringen. Ist er an eine gegen die Erde feste Ebene gebunden, so strebt somit die Figurenachse in diejenige Richtung, die sich durch Projektion der Richtung der Erdachse auf die feste Ebene ergibt. Ist die feste Ebene horizontal, so erscheint somit ein derartiger Kreisel als Deklinatorium; er strebt in die Richtung des Meridians, also in die Nord-Süd-Richtung. Ist die Ebene vertikal, so stellt der Kreisel ein Inklinatorium dar.

Die Idee eines auf diesem Prinzip konstruierten Kreiselkompasses stammt bereits von Foucault (1852). Weiter ausgestaltet wurde die Idee vor allem durch Lord Kelvin (1884). Von diesem rührt der Gedanke her, die wagerechte Stabilisierung dadurch möglichst reibungslos herbeizuführen, daß der Kreisel einem System eingefügt wird, das man auf einer Flüssigkeit schwimmen läßt.

17*

Auch die Idee Lord Kelvins erwies sich zunächst aber noch nicht als praktisch durchführbar. Es gelang zunächst noch nicht, die großen Schwierigkeiten zu überwinden, die sich notwendigerweise einerseits aus der Geringfügigkeit des in die Meridianebene weisenden Drehmomentes, andererseits aus den nie völlig vermeidbaren Reibungswiderständen und aus den Beschleunigungen ergeben, denen bei der Benutzung auf Schiffen ja stets der Aufstellungsort des Kompasses ausgesetzt ist.

Die erste praktisch verwertbare Konstruktion eines Kreiselkompasses stammt von Anschütz-Kämpfe (um 1908). Bei diesem Instrument, das im Gegensatze zu späteren Konstruktionen gewöhnlich als Einkreiselkompaß bezeichnet wird, ruht der Kreisel in einer Kapsel, die an einem Schwimmer befestigt ist. Der Kreisel wird als Drehstrommotor angetrieben, und zwar auf ungefähr 20 000 Umdrehungen in der Minute. Der Schwimmer, der zugleich die Windrose trägt, ruht in einem Cardanisch aufgehängten und mit Quecksilber gefüllten Becken.

Die Einstellung in die Nordrichtung erfolgt nach Abklingen einiger langsamer Schwingungen, wozu jedoch in der Regel eine Zeit von einigen Stunden oder noch mehr erforderlich ist. Selbstverständlich trachtet man durch geeignete Vorrichtungen die auftretenden Schwingungen so stark wie möglich zu dämpfen, um sie so rasch wie möglich zum Verschwinden zu bringen.

Wesentliche Fehler sind bei der Anwendung dieses Kompasses einerseits durch die Schiffsgeschwindigkeit, andererseits durch die Schiffsbeschleunigungen bedingt. Die Schiffsgeschwindigkeit wirkt wie eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Was die Beschleunigungen betrifft, so folgt aus der Theorie, daß sich der Kreisel nach jeder Änderung der Fahrtrichtung ohne Schwingungen in seine neue Ruhelage einstellt, woferne die ungedämpfte Schwingung des Kreisels eine Dauer von 84 Minuten hat; dann erfolgen nämlich die Schwingungen synchron mit denen eines mathematischen Pendels, dessen Länge mit dem Erdradius übereinstimmt. Die größten Störungen werden durch die nördlichen oder südlichen Schiffsbeschleunigungen hervorgebracht; östliche oder westliche sind daneben bedeutungslos.

Außer durch die Änderungen in der Fahrtrichtung und im Betrag der Schiffsgeschwindigkeit werden Fehler vor allem durch die Schlingerbewegungen des Schiffs hervorgerufen, vor allem durch die Rollbewegungen, die das Schiff um seine Längsachse ausführt. Das Schlingermoment sucht entweder die Figurenachse oder die

Querachse des Kreiselkompasses quer zu der Schiffsrichtung zu stellen, so daß die Gleichgewichtslage, die die Figurenachse schließlich einnimmt, wesentlich von der Nordrichtung abweichen kann. Nur in dem besonderen Falle, daß die durch die Schlingerbewegungen erzeugten erzwungenen Schwingungen in die Nord-Süd- oder in die Ost-West-Richtung fallen, bleiben sie bei dem Einkreiselkompaß unschädlich.

Allgemein kann jedoch der Einfluß der Schlingerbewegungen dann ausgeschaltet werden, wenn das Trägheitsmoment des als Kompaß dienenden Kreisels um die nord-südliche Achse in entsprechender Weise wesentlich vergrößert wird. Dies gelingt durch die Einfügung weiterer, zwangsweise geführter Kreisel in das schwimmende System. Am vorteilhaftesten erweist sich die Hinzufügung zweier Kreisel, wodurch ein sogenannter *Dreikreiselkompaß* entsteht*).

Natürlich ergibt sich auch umgekehrt die Möglichkeit, mittels geeignet konstruierter Kreiselapparate die *Rotation der Erde experimentell nachzuweisen*. Ein erster derartiger Versuch ist bereits im Jahre 1852 von *Foucault* ausgeführt worden, allerdings ohne ein brauchbares Ergebnis**). Vervollkommnet wurde dieser Versuch vor allem durch *Gilbert****) und — zuerst mit einem brauchbaren Resultat — durch *Foeppl*†). Dieser benutzte als Kreisel einen an drei Drähten aufgehängten Elektromotor, der 1500—2300 Umdrehungen in der Minute machte††). An den Enden der Welle des Motors wurden zwei Schwungräder von je 30 kg Gewicht angebracht†††). Nach der Theorie muß nun, wofern die Achse des Kreisels vor Beginn der Rotation nicht in den Meridian fiel, eine *Ablenkung* eintreten, sobald der Elektromotor in Gang gesetzt wird. In der Tat zeigte der Versuch von *Foeppl* Ablenkungen bis zu 8°, wobei die beobach-

---

*) Näheres hierüber und über den Kreiselkompaß im allgemeinen findet man in dem Buche „Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen" von R. *Grammel*, Braunschweig (Vieweg) 1920.

**) Paris, Comptes rendus 35 (1852), p. 424.

***) Journal de Physique 2 (1883).

†) Vorlesungen über Technische Mechanik, Bd. VI, Leipzig (Teubner) 1920.

††) Auf diese Tourenzahl mußte die Rotation beschränkt werden, weil sonst Resonanzerscheinungen störende Einflüsse ausgeübt hätten.

†††) Die Schwungräder waren von blechernen Gehäusen umgeben, wodurch Störungen vermieden wurden, die sonst der durch die rasche Rotation hervorgerufene Wind erzeugen könnte.

teten Ablenkungen mit den berechneten bis auf etwa 2% übereinstimmten*).

§ 189. Die Kreiselbewegung der Erde.

Auch die rotierende Erde kann infolge ihrer Abplattung als ein Kreisel aufgefaßt werden, auf den als äußere Kraft die von der Sonne und dem Mond herrührende Anziehung wirkt. Die von der Sonne ausgeübte Kraft trachtet die Erdachse senkrecht zur Ekliptik zu stellen. Die Folge hiervon ist nach der schon erwähnten Regel der Präzessionsbewegung, daß die Erdachse rechtwinklig zu der wirkenden Kraft ausweicht. Die Erdachse führt somit als Präzessionsbewegung eine langsame Drehung aus, indem sie um die Ekliptikachse einen Kegelmantel, und zwar in einer Zeit von etwa 26 000 Jahren, beschreibt. Die Präzessionsbewegung äußert sich in einem allmählichen Vorrücken der Durchschnittspunkte des Äquators und der Ekliptik, also des Frühlings- und des Herbstpunktes. Diese Erscheinung wird als Präzession der Äquinoktien bezeichnet.

Die Wirkung des Mondes ist mit der der Sonne nahezu gleich gerichtet, weil die Mondebene nur um ungefähr 5° gegen die Ekliptik geneigt ist und die von dem Mond herrührende Anziehung die Erdachse senkrecht zu der Ebene der Mondbahn zu richten trachtet. Die Wirkung des Mondes ist übrigens größer als die der Sonne. Die jährliche Präzession der Äquinoktien beträgt 50″, von denen 34″ Wirkung des Mondes und 16″ Wirkung der Sonne sind.

Neben der Präzession zeigt die Erde auch eine Nutation ihrer Achse, die allerdings durch äußere Ursachen bewirkt wird und darum im Gegensatze zu der in einem früheren Abschnitt erwähnten „freien“ eine „erzwungene“ Nutation darstellt. Die quantitativ richtige Erklärung der Nutation der Erdachse auf himmelsmechanischer Grundlage und unter Berücksichtigung der Elastizität des Erdkörpers stellt ein sehr kompliziertes Problem dar, auf das hier nicht näher eingegangen werden kann**).

Im übrigen ändert sich, wie neuere Messungen zeigten, periodisch auch die Lage der Erdachse. Die Änderungen lassen sich am einfachsten darstellen durch die Bahn des Nordpols auf der Erdoberfläche. Diese Bahn wurde auf Grund genauer Pol-

---

*) Eine Zusammenstellung der Versuche, die dem Nachweis der Erdrotation durch Gyroskope dienten, findet sich in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band IV 1, II; Artikel Furtwängler.

**) Vgl. hierzu z. B. Newcomb-Engelmann, Populäre Astronomie, 6. Aufl., Leipzig (Engelmann) 1921.

höhenmessungen ermittelt, die zufolge einer internationalen Vereinbarung seit 1899 auf sechs Stationen angestellt wurden, die ziemlich gleichmäßig auf dem nordlichen Parallelkreis von 39° 8′ verteilt sind*). Die so ermittelte Bahn des Nordpols ist für die Jahre 1900—1912 in Fig. 220 dargestellt. Wie aus der Figur ersichtlich ist, liegt die Bahn innerhalb eines Kreises von etwa 10 m Radius

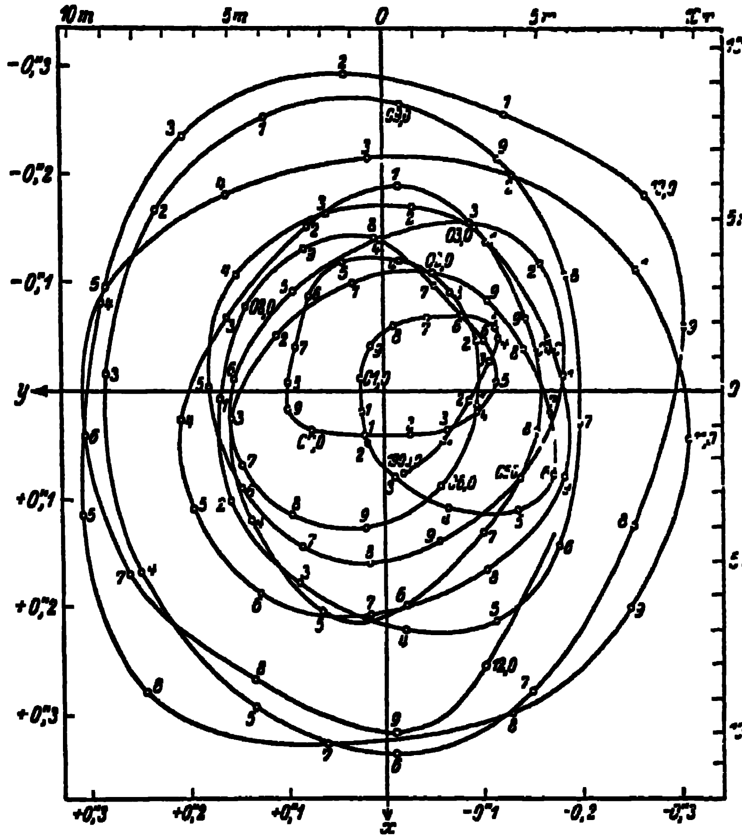


Fig. 220. Bahn des Nordpols von 1900—1912. (Nach Wanach.)

und bildet eine unregelmäßige Spirale, die sich in einer Periode von etwa 7 Jahren erweitert und dann wieder zusammenzieht.

---

*) Die Stationen sind Carloforte in Italien, Tschardjui in Russisch-Zentralasien, Mizusawa in Japan, Ukiah, Cincinnati und Gaithersburg in den Vereinigten Staaten.

Achtzehntes Kapitel.

Die Reibung fester Körper.

§ 190. Die gleitende Reibung.

Neben dem Luftwiderstand stellt das wichtigste Hindernis aller Bewegungen die Reibung dar, von der in diesem Kapitel nur die wechselseitige Reibung fester Körper behandelt werden soll. Bei dieser unterscheidet man wiederum die gleitende und die rollende Reibung.

Zu einer gleitenden Reibung kommt es, wenn ein Körper auf einem anderen fortgeschoben wird. Der Bewegungswiderstand erklärt sich daraus, daß Erhöhungen der einen Fläche in Vertiefungen der anderen greifen. Die Unebenheiten der beiden Körper müssen daher bei der Bewegung fortgerissen werden, oder aber muß der eine Körper ständig über die Vorsprünge des anderen hinweggehoben werden. Hierzu kommt bei glatten Flächen noch der Einfluß der Adhäsion.

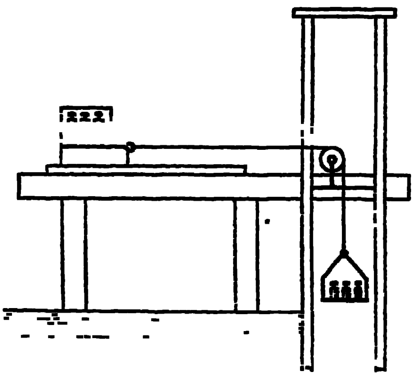


Fig. 221. Tribometer.

Die Gesetzmäßigkeiten des Reibungswiderstandes können experimentell mittels des sogenannten Tribometers untersucht werden, das von Coulomb im Jahre 1781 erfunden wurde (Fig. 221). Auf einem Gestell sind nebeneinander zwei horizontale Schienen angebracht, auf denen ein Kästchen verschoben werden kann, das mit Gewichten belastet wird. Von dem Kästchen führt über eine Rolle eine Schnur, die an ihrem anderen Ende eine Wagschale trägt. Auf diese werden nun soviel Gewichte gelegt, bis sich das Kästchen in Bewegung setzt. Die Gewichte messen dann unmittelbar den Reibungswiderstand.

Variiert man die Belastung des Kästchens, so zeigen die Versuche zunächst, daß der Reibungswiderstand der Belastung des Kästchens (wofern auch das Eigengewicht des Kästchens mit einbezogen wird) proportional ist; der Reibungswiderstand ist also proportional dem gegen die Berührungsfläche ausgeübten Normaldruck. Dagegen erweist sich der Reibungswiderstand als unab-

hängig von der Größe der Berührungsfläche. Er ändert sich nicht, wenn schmälere Schienen verwendet werden; er ändert sich natürlich auch nicht bei einer Verringerung des Schienenabstandes.

Das Verhältnis zwischen dem auf die Wagschale zu bringenden Gesamtgewicht und der Gesamtbelastung des fortzubewegenden Kästchens erscheint derart als eine wechselseitige Konstante der beiden, einander berührenden Materialien. Diese Konstante wird als der Reibungskoeffizient bezeichnet. Läßt man beispielsweise das Kästchen mit schmiedeeiserner Grundfläche auf schmiedeeisernen Schienen gleiten, so ergibt sich der Reibungskoeffizient stets zu 14%. Bei einer Last von 10 kg müssen dabei auf die Wagschale 1400 g gelegt werden, um das Kästchen in Bewegung zu setzen.

Als einige weitere Beispiele von Werten des Reibungskoeffizienten seien angeführt:

Messing auf Gußeisen	0,19
Schmiedeeisen auf Gußeisen.	0,20
Eiche auf Eiche bei parallelen Fasern . .	0,48
Eiche auf Eiche bei gekreuzten Fasern. .	0,32
Holz auf Metall	0,2—0,6
Leder auf Metall	0,5—0,6
Holz auf Stein	0,4
Eisen auf Stein	0,3—0,7.

Legt man einen Körper aus bestimmtem Material auf eine schiefe Ebene aus demselben oder einem anderen Material, so wird der Körper infolge der Reibung auf der schiefen Ebene in Ruhe verharren, wofern der Neigungswinkel kleiner ist als derjenige Winkel, dessen trigonometrische Tangente dem Reibungskoeffizienten gleich ist. Dieser Winkel wird der Reibungswinkel (ψ) genannt. Ist nämlich der Neigungswinkel der schiefen Ebene ihm gleich und ist Q die Last, so zieht den Körper schräg nach abwärts die Kraft $Q \sin \psi$; senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt der Druck $Q \cos \psi$, und der Reibungswiderstand ist, wenn der Koeffizient mit η bezeichnet wird, gleich $\eta Q \cos \psi$. Ist aber $\operatorname{tg} \psi$ gleich η, so heben der Reibungswiderstand und der schräg nach abwärts wirkende Zug einander auf.

Liegt andererseits der Körper auf einer horizontalen Fläche, so vermag ihn eine Kraft, deren Betrag dem Gewichte des Körpers gleich ist, solange nicht aus seiner Ruhelage zu verschieben, als die

Richtung der Kraft innerhalb des sogenannten **Reibungskegels** liegt; diesen beschreibt man mit der betreffenden Stelle als Spitze um eine auf der Fläche errichtete Normale als Achse, wobei der Öffnungswinkel dem Reibungswinkel gleich gemacht wird. Wird lockerer Sand aufgeschüttet, so erweist sich der **Böschungswinkel** gleich dem Reibungswinkel.

Die gleitende Reibung der Ruhe, wie wir sie bisher betrachtet haben, ist im allgemeinen wesentlich größer als die sogenannte **Reibung der Bewegung**, die mit wachsender Geschwindigkeit in der Regel abnimmt. So zeigten beispielsweise Versuche, daß eine Zugkraft von 5—6 kg notwendig ist, um einen Mann von etwa 60 kg, der auf Schlittschuhen auf dem Eise stand, in Bewegung zu setzen, daß hingegen während der Fahrt die dem Reibungswiderstand entgegenwirkende Zugkraft auf 1—2 kg sank*).

Eine sehr wesentliche Verminderung kann die gleitende Reibung durch Anwendung eines **Schmiermittels** erfahren, das man zwischen die beiden, einander berührenden Flächen bringt; als Schmiermittel wird bei Metallen gewöhnlich Öl verwendet**). Bei dessen Benutzung sinkt beispielsweise der Reibungskoeffizient fur Schmiedeeisen auf Gußeisen von 0,20 auf 0,06.

Als ein besonderer Fall der gleitenden Reibung ist auch die **Reibung von Zapfen** in ihren Pfannen bei den Maschinen anzusehen. Denken wir etwa an eine Welle, bei der der Durchmesser des Zapfens $1/5$ von dem Durchmesser des Wellbaums beträgt, und sind Zapfen und Pfanne aus Gußeisen und Schmiedeeisen, ist der Reibungskoeffizient also 0,2, so ist der zu uberwindende Reibungswiderstand ungefähr gleich dem 25. Teil der Summe aus den Gewichten des Wellbaums und der daran befestigten, zu hebenden Last.

§ 191. Die rollende Reibung.

Wesentlich geringer als die gleitende ist die **rollende Reibung**, die dann auftritt, wenn sich ein runder Körper, wie ein **Rad** oder eine **Walze** auf der Unterlage abrollt. In diesem Falle genugt nämlich zur Überwindung des Reibungswiderstandes eine kleinere

---

*) Vgl. Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik, Bd. I.

**) Bei der Bewegung gleiten derart eigentlich zwei Ölschichten aufeinander. Wichtig ist, daß das Öl nicht zu dünnflüssig und der Druck senkrecht zu den Flächen nicht allzustark ist, da sonst das Öl wieder weggepreßt wird. Um dies zu verhüten, werden in dem einen Körper sogenannte Ölnuten angebracht, in denen dann stets etwas Öl wie in einem Reservoir angesammelt bleibt.

Kraft, weil bei der rollenden Bewegung die Erhöhungen der Walze in die Vertiefungen der Unterlage wie Zahne eines Zahnrades in entsprechende Lücken eingreifen. Das Rad, die Walze wirkt wie ein Hebel, und aus dem Hebelgesetz folgt ohne weiteres, daß die rollende Reibung dem Halbmesser der Walze oder des Rades umgekehrt proportional sein muß.

Um die Gesetzmäßigkeiten der rollenden Reibung experimentell zu ermitteln, ließ Coulomb eine Walze auf zwei zu ihr senkrechten Schienen rollen und schlang nun um die Walze eine Schnur, die an ihren beiden Enden zwei gleich große, beliebig auswechselbare Gewichte trug. Uberdies war um die Walze eine Schnur gelegt, an der eine Wagschale befestigt war. Auf diese wurden soviel Gewichte gelegt, daß sich die Walze eben in Bewegung setzte. Diese Gewichte maßen dann die rollende Reibung, während die bewegte Last durch die Summe aus dem Gewicht der Walze und den beiden angehängten gleichen größeren Gewichten gegeben war. Die Experimente zeigten, daß die Reibung bei gegebener Walze der Größe der Last, also dem Drucke, direkt proportional, hingegen bei gleicher Last dem Halbmesser der Walze umgekehrt proportional ist. Es gilt also die Beziehung

$$R' = \zeta \frac{Q}{r}, \qquad 241)$$

wenn Q die Last, r der Walzenradius und R' der Widerstand der rollenden Reibung sind. Der Proportionalitätsfaktor ζ, der als eine Materialkonstante erscheint und nach Gl. 241 die Dimension einer Lange haben muß, heißt der Koeffizient der rollenden Reibung. Es ist beispielsweise ζ für Reibung von Eichenholz auf Eichenholz gleich 0,018 cm, für Gußeisen auf Gußeisen gleich 0,006 cm. Für ein gußeisernes Rad, das mit einem Radius von 50 cm auf einer gußeisernen Schiene rollt, wurde demnach beispielsweise die rollende Reibung rund den 10000. Teil der Last betragen. Wesentlich größer ist indessen stets die Zapfenreibung der Radachse.

§ 193. Die Reibung der Transportmittel.

Da die rollende Reibung (wofern der Radius nicht zu klein gewählt wird) wesentlich geringer als die gleitende ist, beruht in der Praxis alles Transportwesen auf rollenden Bewegungen. Die einzige Ausnahme stellt der Transport mit Schlitten dar, der deshalb zweckmäßig ist, weil der Koeffizient der gleitenden Reibung zwischen Eisen und Schnee nur etwa 2—3% beträgt, also weit

geringer ist, als selbst bei guter Schmierung der Reibungskoeffizient zwischen gleitenden Metallen.

Sonst vermeidet man aber stets gleitende Bewegungen. So legt man schwere Lasten, die eine kurze Strecke weit transportiert werden sollen, auf Walzen und bewegt sie mittels dieser rollend auf einer allenfalls vorher hergestellten glatten Bahn. Derart kann beispielsweise ein einziger Mann eine Last verschieben, zu deren gleitenden Fortbewegung etwa 50 Männer erforderlich wären.

Fuhrwerke und sonstige Beförderungsmittel werden, von dem Schlitten abgesehen, stets mit Rädern ausgestattet. Je größer diese sind, desto geringer ist die Reibung; doch wäre es natürlich andererseits wieder unzweckmäßig und unökonomisch, dem Beförderungsmittel zu große Dimensionen zu geben. Für Eisenbahnen nimmt man den Gesamtwiderstand aller Arten von Reibung zu etwa $^1/_2$% der zu befördernden Last (einschließlich des Zuggewichtes) an, bei Straßenfuhrwerk je nach der Beschaffenheit der Straße und des Pflasters zu 2—3%, bei Automobilen mit guter Bereifung und auf guten Straßen zu etwa 1%.

§ 193. Friktionsrollen und Kugellager.

Um auch die verhältnismäßig beträchtliche Zapfenreibung in rollende Reibung zu verwandeln, bedient man sich ebenfalls geeigneter Vorrichtungen, unter denen die Friktionsrollen und die Kugellager besondere Bedeutung erlangt haben. Die Friktionsrollen (Fig. 222) bestehen aus zwei Paaren von Rädern. Ein Paar (die Räder A und B in der Figur) trägt das vordere Ende der Achse, die ohne Zapfenreibung drehbar sein soll, das andere Paar (das in der Figur unsichtbare Rad A′ und das Rad B′) trägt das hintere Achsenende. Der Mittelpunktsabstand zweier, ein derartiges Paar bildender Räder wird stets größer als der Halbmesser, aber kleiner als der Durchmesser eines einzelnen Rades gewählt. Dadurch entsteht zwischen ihnen

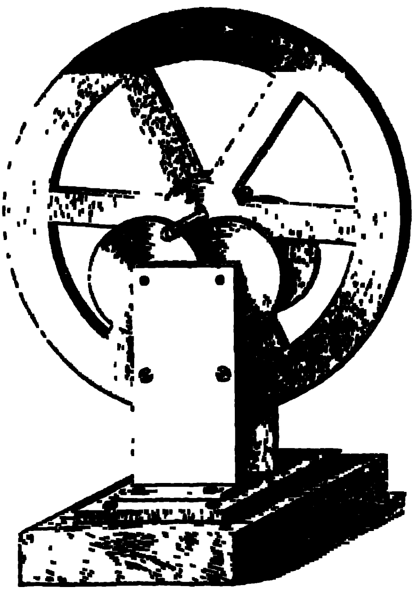


Fig. 222. Friktionsrolle.

ein geeigneter Zwischenraum, in den die ohne Zapfenreibung laufende Achse gelegt wird.

Bezeichnen wir die Arbeit, die bei Zapfenlagerung zur Überwindung der Reibung während eines Umlaufs des großen Rades (W in der Figur) aufgewendet werden müßte, mit E', so ist dieselbe Arbeit bei Lagerung auf Friktionsrollen durch die Beziehung bestimmt

$$E = E' \frac{r}{r'}, \qquad (242)$$

wenn r der Radius der Achse eines Friktionsrades ist und r' der Radius eines Friktionsrades selbst.

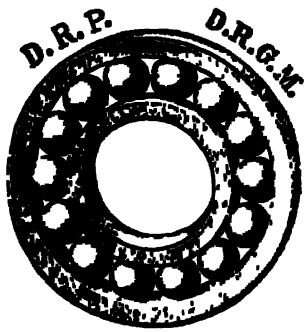


Fig. 223. Kugellager.

Bei einem Kugellager (Fig. 223) bewegt sich die rotierende Welle (in der Figur durch den inneren Kreis dargestellt) auf Walzen in einem ruhenden konzentrischen Lagerkörper. Sind die Kugeln und die Flächen des Lagerkörpers, auf denen sie laufen, und auch die Welle aus gutem Stahl und vollkommen geschliffen, so erniedrigt sich der Reibungswiderstand bis auf etwa 2% des Wertes, den er in einem gewöhnlichen Wellenlager hätte. Ein weiterer Vorteil der Kugellager ist, daß sie viel weniger Schmiermittel als gewöhnliche Lager benötigen*)

§ 194. Der technische Nutzen der Reibung.

In der Technik und überhaupt im alltäglichen Leben spielt die Reibung nicht bloß die Rolle eines unerwünschten Hindernisses, dessen Verminderung angestrebt werden muß; in vielen Fällen erweist sich die Reibung auch von unmittelbarem Vorteil. Nur durch die Reibung wird es ja möglich, Stricke und Schnüre zum Verbinden von Gegenständen zu verwenden, Schrauben und Nägel zum Befestigen von Körpern. Ohne Reibung könnten wir keinen Gegenstand mit unseren Händen fassen, keinen Weg mit unseren Füßen zurücklegen. Daß bei Glatteis durch Aufstreuen von Sand die sonst zu geringe Reibung künstlich erhöht werden muß, beweist dies am deutlichsten, ebenso die Tatsache, daß auf zu glatten Schienen eine Lokomotive mit umlaufenden Rädern an ihrer Stelle verharrt**).

---

*) Als Nachteil stehen diesen Vorteilen allerdings Kostspieligkeit und große Empfindlichkeit gegen Stöße gegenüber.

**) Umgekehrt kommt es auch zu einen Stillstand mit umlaufenden Rädern, wenn die zu befördernde Last, deren Trägheitswiderstand ja

Bei Treibriemen oder Treibseilen wird die Reibung dazu benutzt, um Bewegung von einem Maschinenrad auf ein anderes zu übertragen. Bei der Bremsung dient die Reibung zur Verzögerung oder Aufhebung von Bewegungen. Mit Vorteil kann die Reibung auch dann verwendet werden, wenn eine sehr große Last mittels einer kleinen Kraft festgehalten oder ohne zu großen Kraftaufwand langsam in die Tiefe hinabgelassen werden soll. Schlingt man ein Seil, an dem eine schwere Last befestigt ist, um einen nicht drehbaren, zylindrischen Holzstamm, so genügt oft schon eine Viertel- bis eine halbe Umwicklung, um die Kraft, die das Gleichgewicht halten soll, auf die Hälfte zu reduzieren. Bei viermaliger Umwicklung kann die Kraft oft schon auf den 1000. bis 10 000. Teil der Last verringert werden.

§ 195. Das Bremsdynamometer.

Auf einer Anwendung der gleitenden Reibung beruht auch ein von Prony (1822) ersonnener Apparat, der zur Messung des Effektes von Maschinen dient und als Bremsdynamometer oder Pronyscher Zaum bezeichnet wird. Bei diesem Apparat (Fig. 224) wird auf der Achse der Maschine (AB) eine Trommel (T) befestigt. Gegen die Trommel werden nun die halbkreisförmig ausgeschnittenen

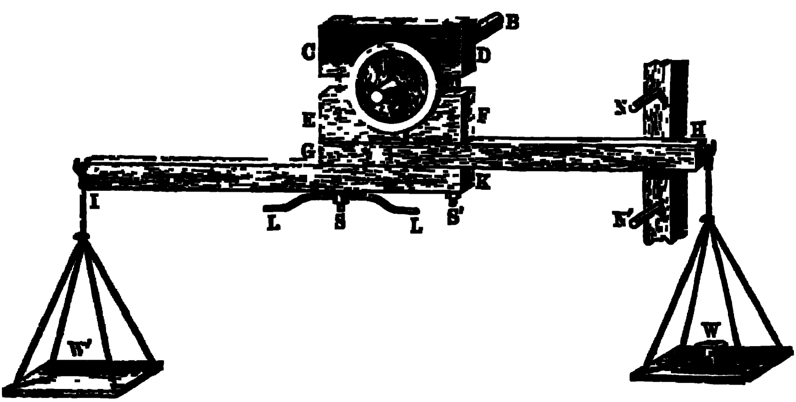


Fig. 224. Bremsdynamometer.

Backen einer Bremse, des sogenannten Zaumes, (CD und EF) gepreßt, wozu zwei Schrauben (S und S') und zur Regulierung überdies ein Hebel (LL) dienen. Mit dem Zaume ist ein Hebel (GH) verbunden, der an seinem Ende eine Wagschale (W) trägt. Er wird

überwunden werden muß, zu schwer ist, wie man dies namentlich bei dem Anfahren von Güterzügen beobachten kann.

durch einen entgegengesetzten zweiten Wagbalken (IK), der ebenfalls eine Wagschale (W') trägt, ausbalanciert*).

Infolge der Reibung müßte nun, wenn die Achse rotiert, in demselben Umdrehungssinn auch die Bremse und mit ihr der ausbalancierte Hebelarm mitgenommen werden. Es würde daher, wenn der Umlauf (wie in der Figur angedeutet) etwa entgegen dem Uhrzeiger verläuft, der Wagbalken GH gegen den Stab N anstoßen. Dies läßt sich dadurch verhindern, daß auf die Wagschale W Gewichte in einem bestimmten Gesamtbetrag, der etwa P genannt werde, aufgelegt werden. Welches der richtige Wert von P ist, erkennt man leicht daraus, daß, wenn er zu groß gewählt wird, der Wagbalken wiederum unten bei N' anstoßt.

Um den Effekt zu bestimmen, schaltet man nun zunächst die Arbeitsmaschinen aus und reguliert sodann den Apparat durch Auflegen geeigneter Gewichte und unter Benutzung des Hebels LL derart, daß der Wagbalken in horizontaler Stellung spielt. Überdies ermittelt man die Tourenzahl (n) der Achse.

Es sei nun etwa l die Lange der Strecke MH, wenn M der Punkt des Balkens ist, der vertikal unterhalb des Zentrums der Trommel liegt. Dann ist das Produkt P · l nach dem Hebelgesetz gleich dem Drehmoment der Reibung. Daher ergibt sich die in der Sekunde geleistete Arbeit zu

$$W = wPl, \tag{243}$$

wenn w die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Ist n die Tourenzahl pro Minute, so ist aber

$$w = \frac{2\pi n}{60}. \tag{244}$$

Wird P in kg und l in Metern ausgedrückt, so ergibt sich daher der Effekt in „Pferdestärken“ (= 75 kg m/sec) nach der Beziehung

$$W = \frac{\pi n l P}{2250}. \tag{245}$$

---

*) Um das Gleichgewicht zu vervollständigen, brauchen nur entsprechende kleine Gewichtsstücke auf eine der beiden Wagschalen aufgelegt zu werden.

Dritter Teil.

Mathematische Ergänzungen zur Mechanik fester Körper.

Neunzehntes Kapitel.

Die Grundgleichungen der Mechanik des Massenpunktes.

§ 196. Der vektorielle und der analytische Ausdruck des Newtonschen Kraftgesetzes.

Nach dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetz ist der Vektor der Kraft gleich gerichtet mit dem Vektor der Beschleunigung und in seinem Betrage gleich dem Produkt aus der Masse und dem Betrag der Beschleunigung. Dieses Gesetz findet einen einfachen mathematischen Ausdruck bei Gebrauch der vektoriellen Schreibweise, in der die Gleichsetzung zweier Vektoren Übereinstimmung in Betrag, Richtung und Richtungssinn bedeutet*). Verwenden wir die übliche Bezeichnungsweise, die für Vektoren deutsche Buchstaben benutzt (und zwar diejenigen, die den lateinischen, für den Betrag gebrauchten entsprechen), so kann dem Newtonschen Kraftgesetz die Form gegeben werden

$$\mathfrak{K} = m\mathfrak{b}, \tag{246}$$

wenn $\mathfrak{K}$ den Kraftvektor und $\mathfrak{b}$ den Beschleunigungsvektor bedeutet.

Da der Beschleunigungsvektor definiert ist als der zeitliche Differentialquotient des Geschwindigkeitsvektors ($\mathfrak{v}$), so kann die Gl. 246 auch in der Form geschrieben werden

$$\mathfrak{K} = m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}. \tag{247}$$

Wie bei allen zwischen Vektorgrößen bestehenden Beziehungen, so kann auch bei dem Newtonschen Kraftgesetz statt der vekto-

---

*) Sind zwei Vektoren entgegengesetzt gerichtet und im Betrag gleich, so setzt man die beiden Vektoren einander mit entgegengesetztem Vorzeichen gleich.

riellen die **analytische Schreibweise** gebraucht werden. Jeder Vektor kann nämlich auch aufgefaßt werden als die geometrische Summe dreier Vektoren, die in die Achsen eines Koordinatensystems fallen und deren Beträge gleich sind den **Komponenten** der Vektorgröße nach diesen Koordinatenachsen. Nennen wir die Komponenten eines beliebigen Vektors $\mathfrak{E}$ etwa E_x, E_y, E_z, und bezeichnen wir mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ drei Vektoren von der Längeneinheit, die in die Richtungen der drei positiven Koordinatenachsen fallen, so können wir demnach den Vektor $\mathfrak{E}$ in der Form darstellen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{i}E_x + \mathfrak{j}E_y + \mathfrak{k}E_z. \tag{248}$$

(Wir benutzen dabei die Tatsache, daß überhaupt jeder Vektor aufgefaßt werden kann als Produkt aus einem in seine Richtung fallenden **Einheitsvektor** und dem Betrag des Vektors.) Die drei Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ werden die **Grundvektoren des Koordinatensystems** genannt.

Die Gl. 248 gilt natürlich auch für den Geschwindigkeitsvektor. Ersetzen wir also in dieser Geichung den beliebig gelassenen Vektor $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{v}$ und differenzieren wir nach der Zeit, so erhalten wir, weil wir die Richtungen der Koordinatenachsen als unveränderlich ansehen, die Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{i}\frac{dv_x}{dt} + \mathfrak{j}\frac{dv_y}{dt} + \mathfrak{k}\frac{dv_z}{dt}. \tag{249}$$

Diese Gleichung besagt aber nichts anderes, als daß die **Komponenten der Beschleunigung gleich sind den zeitlichen Differentialquotienten der Geschwindigkeitskomponenten.**

In analytischer Schreibweise nimmt somit das zweite **Newtonsche** Bewegungsgesetz die Form des **Gleichungstripels** an:

$$K_x = m\frac{dv_x}{dt}, \qquad K_y = m\frac{dv_y}{dt}, \qquad K_z = m\frac{dv_z}{dt}. \tag{250}$$

Sind nun die Koordinaten des jeweiligen Aufenthaltsortes des bewegten Massenpunktes x, y, z, so können wir andererseits auch diese Koordinaten als die Komponenten des **Radiusvektors** auffassen, der von dem Koordinatenursprung zu dem Aufenthaltsort gezogen wird. Bezeichnen wir den Radiusvektor mit $\mathfrak{r}$, so können wir also auch setzen

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z. \tag{251}$$

Nun ist aber der in einem Zeitelement dt zurückgelegte Weg, als Vektor aufgefaßt, nichts anderes als der geometrische Unterschied der Vektoren, die für den Beginn und das Ende des Zeitelementes

die veränderliche Größe $\mathfrak{r}$ darstellen. Hieraus folgt ohne weiteres, daß

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \tag{252}$$

ist, und somit ist nach Gl. 251

$$v_x = \frac{dx}{dt} \text{ usw.} \tag{253}$$

Die Gleichungen (250) können somit auch (wenn wir schließlich noch für die Kraftkomponenten die üblichen Bezeichnungen X, Y, Z gebrauchen) in der Form der sogenannten **Bewegungsgleichungen** geschrieben werden, nämlich

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ Y &= m\frac{d^2y}{dt^2} \\ Z &= m\frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \tag{254}$$

§ 197. Die natürlichen Bewegungsgleichungen.

Die Zerlegung des **Beschleunigungsvektors** in eine **tangentiale** und eine **normale Komponente** läßt sich leicht mittels der fundamentalen Beziehungen der Vektorrechnung ableiten. Bezeichnen wir nämlich den Einheitsvektor, der in die Richtung eines beliebigen Vektors $\mathfrak{E}$ fällt, mit $\mathfrak{e}$, so können wir, wie schon erwähnt wurde, setzen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{e}E. \tag{255}$$

Hieraus folgt durch Differenziation nach der Zeit

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \mathfrak{e}\frac{dE}{dt} + \frac{d\mathfrak{e}}{dt}E. \tag{256}$$

In welcher Beziehung nun der selbst einen Vektor darstellende zeitliche Differentialquotient des Einheitsvektors zu diesem steht, erkennen wir leicht aus einer einfachen Betrachtung, die an den Begriff des **inneren** oder **skalaren***) **Vektorproduktes** anknüpft. Da, wie schon in einem früheren Abschnitt (§ 31) erwähnt wurde, das innere Produkt zweier beliebiger Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$, für das das Symbol $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ oder auch $(\mathfrak{E}\mathfrak{F})$ gebraucht wird, durch die Beziehung gegeben ist

$$\mathfrak{E}\mathfrak{F} = EF\cos(\mathfrak{E}, \mathfrak{F}), \tag{257}$$

---

*) Als **Skalar** bezeichnet man jede Größe, zu deren Bestimmung eine Zahlenangabe (bei gegebener Maßeinheit, also bei gegebener »Skala«) genügt. Hierdurch ergibt sich der Gegensatz zu den Vektoren, die erst durch Angabe von Betrag **und** Richtung bestimmt sind.

so folgt daraus, daß

$$\mathfrak{E}\mathfrak{F} = \mathrm{EF}, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{E} \parallel \mathfrak{F}; \tag{258}$$

daß hingegen

$$\mathfrak{E}\mathfrak{F} = 0, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{E} \perp \mathfrak{F}. \tag{259}$$

Umgekehrt kann man natürlich aus dem Verschwinden des inneren Produktes zweier Vektoren stets schließen, daß sie aufeinander senkrecht stehen.

Für den Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ folgt aus Gl. 258

$$\mathfrak{e}\mathfrak{e} = 1, \tag{260}$$

und hieraus durch Differentiation

$$\mathfrak{e}\frac{d\mathfrak{e}}{dt} = 0. \tag{261}$$

Der Vektor, der den zeitlichen Differentialquotienten eines Einheitsvektors darstellt, steht also auf diesem selbst stets senkrecht.

Andererseits ist aber nun $d\mathfrak{e}$ nichts anderes als der im Bogenmaß gemessene Winkel, um den sich in dem Zeitelement dt die Richtung des Vektors $\mathfrak{e}$ (oder $\mathfrak{E}$) gedreht hat. Nennen wir diesen Winkel $d\vartheta$, so ist also der Betrag von $d\mathfrak{e}/dt$ gleich $d\vartheta/dt$.

Die Gl. 256 besagt demnach folgendes. Der zeitliche Differentialquotient eines beliebigen Vektors $\mathfrak{E}$ läßt sich stets in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegen, nämlich eine in der Richtung des Vektors und eine dazu senkrechte. Die erste Komponente hat den Betrag dE/dt, die zweite den Betrag $E \cdot d\vartheta/dt$, wenn $d\vartheta$ der Winkel ist, um den sich in dem Zeitelement dt die Richtung des Vektors ändert.

Indem wir diese allgemein gültige Beziehung auf den Geschwindigkeitsvektor anwenden, erhalten wir ohne weiteres die Formeln für die Tangential- und die Normalbeschleunigung. Jene ist gleich dv/dt; hingegen ist die Normalbeschleunigung gleich $v \cdot d\vartheta/dt$. Betrachten wir aber ein Stück der Bahn, dargestellt durch das Bahnelement AB, so ist $d\vartheta$ nichts anderes als der Winkel, den die in den Punkten A und B an die Bahn gelegten Tangenten miteinander einschließen. Es ist also $d\vartheta$ der sogenannte Kontingenzwinkel, und nach einer bekannten elementaren geometrischen Beziehung ist das Kurvenstück AB gleich dem Produkt aus dem Kontingenzwinkel und dem Krümmungsradius (ϱ). Andererseits ist AB gleich $v \cdot dt$. Daher wird

$$d\vartheta = \frac{v}{\varrho}\,dt, \tag{262}$$

und somit wird die Normalbeschleunigung gleich

$$b_n = \frac{v^2}{\varrho}. \tag{263}$$

§ 198. Drehimpuls und statisches Moment.

Die für den Drehimpuls und die Flächengeschwindigkeit eines Massenpunktes geltenden Beziehungen ergeben sich sehr einfach unter Benutzung des schon in einem früheren Abschnitt (§ 17) abgeleiteten Begriffs des äußeren Vektorproduktes. Dieses, selbst wieder einen Vektor darstellende Produkt, für das das Symbol $[\mathfrak{E}\mathfrak{F}]$ gebräuchlich ist, kehrt, wie schon erwähnt wurde, den Richtungssinn bei einer Vertauschung der Reihenfolge der Faktoren um; es ist also

$$[\mathfrak{F}\mathfrak{E}] = -[\mathfrak{E}\mathfrak{F}]. \tag{264}$$

Bezeichnen wir das Vektorprodukt mit $\mathfrak{G}$, so gilt für dessen Betrag, weil er durch den Flächeninhalt des von den beiden Vektoren gebildeten Parallelogramms bestimmt ist, die Beziehung

$$G = EF \sin(\mathfrak{E}, \mathfrak{F}). \tag{265}$$

Hieraus folgt, daß

$$[\mathfrak{E}\mathfrak{F}] = 0, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{E} \parallel \mathfrak{F}. \tag{266}$$

Das äußere Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst verschwindet. Für die Grundvektoren eines Koordinatensystems folgt somit

$$[\mathfrak{i}\mathfrak{i}] = [\mathfrak{j}\mathfrak{j}] = [\mathfrak{k}\mathfrak{k}] = 0. \tag{267}$$

Andererseits ergeben sich aus der Definition des äußeren Vektorproduktes die Beziehungen

$$[\mathfrak{i}\mathfrak{j}] = \mathfrak{k}; \qquad [\mathfrak{j}\mathfrak{k}] = \mathfrak{i}; \qquad [\mathfrak{k}\mathfrak{i}] = \mathfrak{j}. \tag{268}$$

Unter Benutzung der Gl. 248 können wir das äußere Vektorprodukt nun auch in der Form schreiben

$$[\mathfrak{E}\mathfrak{F}] = [(\mathfrak{i}E_x + \mathfrak{j}E_y + \mathfrak{k}E_z)(\mathfrak{i}F_x + \mathfrak{j}F_y + \mathfrak{k}F_z)]. \tag{269}$$

Multiplizieren wir aus und beachten wir die Gleichungen (267) und (268), so erhalten wir für die Komponenten des äußeren Vektorproduktes die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} [\mathfrak{E}\mathfrak{F}]_x &= E_yF_z - E_zF_y, \\ [\mathfrak{E}\mathfrak{F}]_y &= E_zF_x - E_xF_z, \\ [\mathfrak{E}\mathfrak{F}]_z &= E_xF_y - E_yF_x. \end{aligned}\right\} \tag{270}$$

Wir definieren nun zunächst als das statische Moment einer Kraft in bezug auf einen Punkt, von dem der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ zu dem Angriffspunkt der Kraft führt, das äußere Produkt aus $\mathfrak{r}$ und dem Vektor der Kraft. Wir setzen also

$$[\mathfrak{r}\mathfrak{K}] = \mathfrak{M}. \tag{271}$$

Das halbe äußere Produkt aus $\mathfrak{r}$ und dem Geschwindigkeitsvektor

des Massenpunktes, in dem die Kraft angreift, definieren wir als die **Flächengeschwindigkeit**; wir setzen also

$$[\mathfrak{r}\mathfrak{v}] = 2\mathfrak{f}. \tag{272}$$

Endlich definieren wir als **Drehimpuls** das Produkt aus der Masse des Massenpunktes und der doppelten Flächengeschwindigkeit, also

$$\mathfrak{U} = m[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]. \tag{273}$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach der Zeit, so finden wir

$$\frac{1}{m}\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \left[\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right] + \left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{v}\right]. \tag{274}$$

In dem letzten Vektorprodukt sind aber nach Gl. 252 beide Faktoren identisch, so daß dieses Vektorprodukt verschwindet. Andererseits ist $m \cdot d\mathfrak{v}/dt$ nach dem Kraftgesetz nichts anderes als die Kraft $\mathfrak{K}$, und das Vektorprodukt aus $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{K}$ ergibt wiederum nach Gl. 271 das statische Moment $\mathfrak{M}$. Wir erhalten so die einfache Beziehung

$$\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{U}}{dt}. \tag{275}$$

Das statische Moment erscheint also durch dieselbe vektorielle Beziehung mit dem Drehimpuls verknüpft wie die Kraft mit der Bewegungsgröße.

Wenn das **Drehmoment verschwindet**, ist nach Gl. 275 der **Drehimpuls** und folglich auch die **Flächengeschwindigkeit konstant**. Das Drehmoment wird aber gemäß Gl. 271 dann gleich Null, wenn die Kraft ständig zu dem Punkte gerichtet ist, von dem aus der Radiusvektor gezogen wird. Damit erscheint der schon in § 34 erwähnte Satz bewiesen, daß die Bewegung eines Körpers, auf den eine stets nach demselben Punkt gerichtete Kraft wirkt, in einer und derselben Ebene beharrt und ihre Flächengeschwindigkeit in bezug auf jenen Punkt nicht ändert.

Selbstverständlich läßt dieses Theorem auch eine Umkehrung zu. Aus der Konstanz der Flächengeschwindigkeit nach Betrag und Richtung kann immer geschlossen werden, daß die wirksame Kraft nach dem Bezugspunkt der Flächengeschwindigkeit gerichtet ist.

§ 199. Arbeit und Potential.

Die **Arbeit** erscheint definiert als das **innere** oder **skalare Produkt** aus Kraft und Wegelement. Betrachten wir nun zwei ganz beliebige Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$, so können wir gemäß Gl. 248 ihr inneres Produkt auch in der Form schreiben:

$$\mathfrak{E}\mathfrak{F} = (\mathfrak{i}E_x + \mathfrak{j}E_y + \mathfrak{k}E_z)(\mathfrak{i}F_x + \mathfrak{j}F_y + \mathfrak{k}F_z). \tag{276}$$

Multiplizieren wir aus, so verschwinden aber gemäß Gl. 259 sechs von den neun Gliedern, und wir erhalten die Beziehung, die das innere Produkt zweier Vektoren durch ihre Komponenten ausdrückt, nämlich:

$$\mathfrak{E}\mathfrak{F} = E_x F_x + E_y F_y + E_z F_z . \tag{277}$$

Setzen wir in dieser allgemein gültigen Beziehung für $\mathfrak{E}$ die Kraft ein (mit den Komponenten X, Y, Z) und für $\mathfrak{F}$ das als Vektor aufgefaßte Wegelement $d\mathfrak{s}$ (mit den Komponenten dx, dy, dz), so wird daher die unendlich kleine Arbeit, die längs des Wegelementes von der Kraft verrichtet wird, gleich*)

$$dA = \mathfrak{K}\, d\mathfrak{s} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz . \tag{278}$$

Wir wollen nun annehmen, daß ein Potential bestehe, derart, daß die Kraft als negativer Gradient dieses Potentials darstellbar sei. Wir betrachten sodann einen beliebigen Punkt A und denken uns in ihm ein Koordinatensystem derart gelegt, daß die ξ- und die η-Achse in die Tangentialebene zu liegen kommen, die die durch den Punkt A gelegte Äquipotentialfläche in diesem Punkte berührt, und daß die positive ζ-Achse die Richtung hat, in der das Potential zunimmt. Bezeichnen wir die Komponenten der Kraft in bezug auf dieses ξ-η-ζ-System mit Ξ, H, Z, so ist

$$\Xi = 0, \qquad H = 0, \qquad Z = -\frac{dV}{d\zeta}, \tag{279}$$

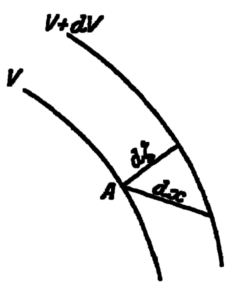


Fig. 225.

wenn $d\zeta$ der Abstand zwischen den benachbarten Äquipotentialflächen ist, denen die Werte V und (V + dV) entsprechen.

Wir denken uns nun mit A als Ursprung irgendein beliebiges anderes Koordinatensystem an Stelle des bisher betrachteten. In ihm seien die Kraftkomponenten X, Y, Z und die Koordinaten x, y, z. Dann ist, wie ohne weiteres aus Fig. 225 folgt,

$$dx = \frac{d\zeta}{\cos(\zeta, x)}, \tag{280}$$

und somit wird

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \zeta} \cos(\zeta, x) . \tag{281}$$

Andererseits ist nach einer elementaren geometrischen Beziehung

---

*) Obwohl für die unendliche kleine Arbeit allgemein das Symbol dA gebraucht wird, ist doch zu beachten, daß diese Größe keineswegs unbedingt ein vollständiges Differential darstellen muß.

$$\mathrm{X} = \Xi \cos(\xi, x) + H \cos(\eta, x) + Z \cos(\zeta, x), \tag{282}$$

also nach Gl. 279 und 281

$$\mathrm{X} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{283}$$

Zwei analoge Beziehungen gelten natürlich auch für die Komponenten Y und Z. Es wird daher die **Arbeit**, die bei einer Bewegung zwischen zwei beliebigen Punkten P_1 und P_2 geleistet wird,

$$A = -\int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right). \tag{284}$$

Ist aber, wie wir angenommen haben, V eine nur von den Koordinaten abhängige Funktion, die im Punkte P_1 den Wert V_1 und im Punkte P_2 den Wert V_2 habe, so wird einfach

$$A = V_1 - V_2. \tag{285}$$

Der Wert der Arbeit hängt also dann einzig und allein von dem **Potentialunterschied** ab, ist hingegen von der Länge und der Form des Weges völlig unabhängig.

Erfüllt im besonderen die Kraft das Gesetz

$$\mathfrak{K} = -\frac{C}{r^2} \frac{\mathfrak{r}}{r}, \tag{286}$$

ist sie also zu dem Punkte gerichtet, von dem aus der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ gezogen wird, und ist ihr Betrag dem **Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional***), so ist leicht einzusehen, daß die Kraft ein Potential von der Form besitzen muß

$$V = -\frac{C}{r}. \tag{287}$$

Dann wird nämlich

$$\mathrm{X} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{C}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}. \tag{288}$$

Andererseits ist aber

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{289}$$

und somit

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}. \tag{290}$$

Es wird also

$$\mathrm{X} = -\frac{Cx}{r^3}. \tag{291}$$

Hieraus folgt, wenn wir von der analytischen zur vektoriellen Schreibweise übergehen, in der Tat wiederum die Gl. 286.

*) Denn $\mathfrak{r}/r$ bedeutet ja einen Einheitsvektor.

§ 200. Die Erhaltung der Energie.

Multiplizieren wir die das Newtonsche Kraftgesetz ausdrückende Beziehung ($\mathfrak{K} = m \cdot d\mathfrak{v}/dt$) noch skalar mit der Identitat

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{v}\,dt, \tag{292}$$

so erhalten wir die Beziehung

$$\mathfrak{K}\,d\mathfrak{s} = m\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}dt. \tag{293}$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathfrak{v}\mathfrak{v}) = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}, \tag{294}$$

und somit, wenn wir die lebendige Kraft mit L bezeichnen,

$$\mathfrak{K}\,d\mathfrak{s} = \frac{dL}{dt}dt. \tag{295}$$

Besteht aber ein Potential, so ist die linke Seite dieser Gleichung nichts anderes als die mit entgegengesetztem Vorzeichen genommene Änderung des Potentials, und wir finden somit

$$\frac{dV}{dt} + \frac{dL}{dt} = 0, \tag{296}$$

oder, wenn wir die Integrationskonstante mit W bezeichnen,

$$V + L = W. \tag{297}$$

Die Größe W stellt als Summe aus der lebendigen Kraft und dem Potential die mechanische Energie als eine von Ort und Zeit unabhängige Konstante dar.

§ 201. Die Relativbeschleunigung.

Wir betrachten ein Koordinatensystem, das, auf ein Fundamentalsystem bezogen, um seine z-Achse mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit (w) rotiere. Die Grundvektoren dieses Koordinatensystems seien $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Dann ist $\mathfrak{k}$ konstant, hingegen sind $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ zeitlich veränderlich. Der Vektor $d\mathfrak{i}/dt$ steht nach dem schon im Anschluß an Gl. 261 Gesagten senkrecht auf dem Vektor $\mathfrak{i}$; er steht aber auch senkrecht auf der z-Achse; sein Betrag ist natürlich gleich w. Bezeichnen wir also einen Vektor, der die Richtung der z-Achse und den Betrag w und einen solchen Richtungssinn hat, daß von seiner Spitze gesehen, die Umdrehung entgegen dem Uhrzeiger erfolgt, als den Vektor der Winkelgeschwindigkeit und mit dem Symbol $\mathfrak{w}$, so können wir gemäß der Definition des äußeren Vektorproduktes setzen

$$\frac{d\mathfrak{i}}{dt} = [\mathfrak{w}\mathfrak{i}]. \tag{298}$$

Denn der durch dieses Vektorprodukt bestimmte Vektor hat eben den Betrag w, steht senkrecht auf $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{i}$, und aus Fig. 226 ist auch leicht ersichtlich, daß der Definition des Richtungssinns des äußeren Vektorproduktes dann Genüge getan ist, wenn in Gl. 298 der Faktor $\mathfrak{w}$ vor den Faktor $\mathfrak{i}$ gesetzt wird. Denn Fig. 226 ist so konstruiert, daß gemäß der konventionellen Festsetzung, von der Spitze des Vektors $\mathfrak{w}$ gesehen, die Rotation des Koordinatenkreuzes entgegen dem Uhrzeiger verläuft; dann erscheint aber in der Tat auch, wie aus der Figur ersichtlich ist, von der Spitze des Vektors $d\mathfrak{i}/dt$ gesehen, diejenige Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt, die den Vektor $\mathfrak{w}$ in die Richtung des Vektors $\mathfrak{i}$ überführt, wenn die drei Vektoren von demselben Punkte aus errichtet werden.

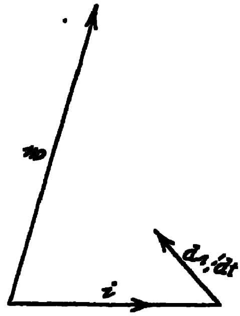


Fig. 226.

In Analogie zu Gl. 298 gilt auch die Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{j}}{dt} = [\mathfrak{w}\mathfrak{j}]. \tag{299}$$

Das äußere Produkt $[\mathfrak{w}\mathfrak{k}]$ ist natürlich Null, weil ja die Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{k}$ gleich gerichtet sind, und in der Tat ist wegen der Konstanz von $\mathfrak{k}$ auch $d\mathfrak{k}/dt$ gleich Null.

Es sei nun $\mathfrak{E}$ ein ganz beliebiger Vektor. Wir betrachten einerseits seinen zeitlichen Differentialquotienten in bezug auf ein Fundamentalsystem, andererseits aber seinen zeitlichen Differentialquotienten in bezug auf das rotierende System. Diesen wollen wir mit $d^*\mathfrak{E}/dt$ bezeichnen, jenen mit $d\mathfrak{E}/dt$ schlechthin. Nun folgt aus Gl. 248 durch zeitliche Differentiation ganz allgemein die Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \mathfrak{i}\frac{dE_x}{dt} + \mathfrak{j}\frac{dE_y}{dt} + \mathfrak{k}\frac{dE_z}{dt} + E_x\frac{d\mathfrak{i}}{dt} + E_y\frac{d\mathfrak{j}}{dt} + E_z\frac{d\mathfrak{k}}{dt}. \tag{300}$$

Berücksichtigen wir die Gleichungen (298) und (299) und die Konstanz von $\mathfrak{k}$, so finden wir somit

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \frac{d^*\mathfrak{E}}{dt} + [\mathfrak{w}\mathfrak{i}]E_x + [\mathfrak{w}\mathfrak{j}]E_y. \tag{301}$$

Fügen wir das ohnedies verschwindende Glied hinzu $[\mathfrak{w}\mathfrak{k}]E_z$, so können wir somit die letzte Gleichung auch in der Form schreiben

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \frac{d^*\mathfrak{E}}{dt} + [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]. \tag{302}$$

Es sei nun $\mathfrak{v}$ die „absolute" Geschwindigkeit, $\mathfrak{v}'$ aber die sogenannte **Relativgeschwindigkeit** in bezug auf das rotierende Koordinatensystem. $\mathfrak{r}$ sei die gerichtete Strecke, die von dem Ursprung zu dem betrachteten Massenpunkt gezogen wird. Dann ist nach Gl. 302, in der wir den beliebig gelassenen Vektor $\mathfrak{S}$ durch $\mathfrak{r}$ ersetzen wollen,

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + [\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]. \tag{303}$$

Differenzieren wir nochmals nach der Zeit und bezeichnen wir die absolute Beschleunigung mit $\mathfrak{b}$, hingegen die relative mit $\mathfrak{b}'$, so finden wir unter Berücksichtigung der Konstanz von $\mathfrak{w}$

$$\mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{v}'}{dt} + \left[\mathfrak{w}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]. \tag{304}$$

Nun ist aber nach Gl. 302

$$\frac{d\mathfrak{v}'}{dt} = \mathfrak{b}' + [\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}']. \tag{305}$$

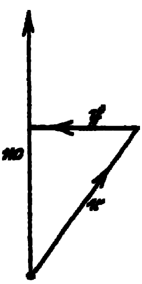
Andererseits ist $d\mathfrak{r}/dt$ gleich $\mathfrak{v}$ und somit nach Gl. 303

$$\left[\mathfrak{w}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = [\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}'] + [\mathfrak{w}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]]. \tag{306}$$

Es wird somit

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' + 2[\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}'] + [\mathfrak{w}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]]. \tag{307}$$

Von dem zweifachen Vektorprodukt, das das letzte Glied dieser Gleichung bildet, wollen wir zunächst den Betrag berechnen. Betrachten wir das Vektorprodukt $[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]$, das wir zur Abkürzung vorübergehend etwa mit $\mathfrak{g}$ bezeichnen wollen, so ist sein Betrag gleich wp, wenn p das **Lot** ist, das von dem betrachteten Massenpunkt (zu dem der Vektor $\mathfrak{r}$ gezogen wird) auf die z-Achse gefällt wird. Denn es ist ja p gleich r sin $(\mathfrak{w}, \mathfrak{r})$. Der Vektor $\mathfrak{g}$ steht senkrecht auf der Zeichenebene der Fig. 227 und ist nach der Definition des Richtungssinns nach rückwärts gerichtet. Da die Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{g}$ aufeinander senkrecht stehen, so ist der Betrag des zweifachen Vektorproduktes gleich w · g, also gleich $w^2 p$. Der Vektor, der das zweifache Vektorprodukt darstellt, steht schließlich senkrecht auf $\mathfrak{w}$ und dem nach rückwärts gerichteten Vektor $\mathfrak{g}$; er liegt also wiederum in der Figurenebene.


Fig. 227.

Sein Richtungssinn muß derart sein, daß von seiner Spitze gesehen, diejenige Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt erscheint, die den Vektor $\mathfrak{w}$ in die Richtung des Vektors $\mathfrak{g}$ überführt (wenn beide Vektoren von demselben Punkte aus errichtet werden). Er hat

also den Richtungssinn, der in Fig. 227 durch den Pfeil auf der stark ausgezogenen Linie dargestellt ist; d. h. er bedeutet eine Zentripetalbeschleunigung von dem Betrage w^2p.

Das vorletzte Glied der Gl. 307 stellt die Coriolis-Beschleunigung dar. Ihr Betrag ergibt sich also zu $2wv'\sin\gamma$, wenn γ der Winkel ist, den die Richtung der Relativbewegung mit der Rotationsachse einschließt.

Zwanzigstes Kapitel.

Spezielle Probleme der Punktmechanik.

§ 202. Der Fall auf dem Kreisbogen.

Da die Pendelbewegung einen Fall durch einen Kreisbogen darstellt, betrachten wir zur Ableitung des genaueren Pendelgesetzes einen Massenpunkt, der von einem festen Punkte P als Anfangslage längs eines um einen Punkt O beschriebenen Kreisbogens zu dem beliebigen Punkte P′ falle (Fig. 228). Die Winkel, die die Radien OP und OP′ mit der Vertikalen einschließen, mögen mit α und φ und der Radius mit l bezeichnet werden.

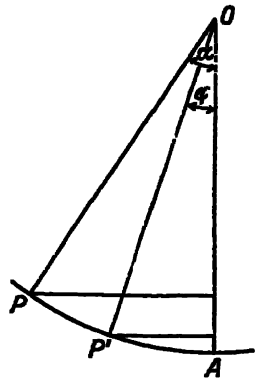


Fig. 228.

Nach dem Satze von der Erhaltung der Energie muß nun die lebendige Kraft, mit der der Massenpunkt in P′ anlangt, der Arbeit gleich sein, die bei dem Fall durch den Höhenunterschied der Punkte P und P′ geleistet wird. Es besteht also die Beziehung

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgl(\cos\varphi - \cos\alpha). \tag{308}$$

Es wird demnach

$$v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)}. \tag{309}$$

Nun ist aber andererseits

$$v = l\frac{d\varphi}{dt} \tag{310}$$

(wenn φ im Bogenmaß gemessen wird), und somit wird

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}. \tag{311}$$

Benutzen wir die goniometrische Identität

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right). \tag{312}$$

(die wir zugleich auch auf den Winkel α anwenden), so können wir der Gl. 311 die für die spätere Rechnung zweckmäßigere Gestalt geben

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}. \tag{313}$$

Zum Zwecke einer weiteren Vereinfachung führen wir sodann eine neue Variable ψ durch die Substitution ein

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\psi. \tag{314}$$

Dann wird

$$\varphi = \alpha \quad \text{für} \quad \psi = \frac{\pi}{2}. \tag{315}$$

Indem wir die Gl. 314 differenzieren, finden wir

$$\tfrac{1}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\psi\,d\psi, \tag{316}$$

also unter Benutzung der Gl. 314

$$d\varphi = \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\psi}}. \tag{317}$$

Fragen wir nun nach der Zeit, die der Massenpunkt braucht, um von dem Punkte P zu dem vertikal unterhalb des Kreiszentrums gelegenen Punkte A zu gelangen, so haben wir die Gl. 313, in der wir für $d\varphi$ den Wert aus Gl. 317 einsetzen, zu integrieren von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha$, also nach erfolgter Substitution von $\psi = 0$ bis $\psi = \pi/2$. Wir finden so unter Benutzung von Gl. 314

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{\left[1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\psi\right]\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(1 - \sin^2\psi)}}. \tag{318}$$

Da sich die beiden Faktoren im Zähler gegen ihren Quadraten gleiche Glieder unter dem Wurzelzeichen des Nenners wegheben, wird somit einfach

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\psi}}. \tag{319}$$

Das in dieser Gleichung auftretende Integral ist die sogenannte

Normalform eines elliptischen Integrals erster Gattung, und der Wert dieses Integrals kann für einen gegebenen Wert des Amplitudenwinkels α ohne weiteres in Tafeln der elliptischen Integrale nachgeschlagen werden. In der üblichen Bezeichnungsweise solcher elliptischer Integrale kann die Gl. 319 auch in der Form geschrieben werden

$$t = \sqrt{\frac{1}{g}}\, F\left(\sin\frac{\alpha}{2},\ \frac{\pi}{2}\right). \tag{320}$$

Einige Werte der Funktion F sind bereits in der früheren Tabelle I in § 53 angegeben worden.

Wollen wir das Integral in eine Reihe entwickeln, so gehen wir von dem binomischen Lehrsatz aus, demzufolge

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots \tag{321}$$

ist. Beschränken wir uns bei genügend kleinem Amplitudenwinkel auf die ersten zwei Glieder der Reihe, so wird daher der Wert des bestimmten Integrals, das J genannt werde,

$$J = \int_0^{\pi/2} d\psi + \tfrac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\int_0^{\pi/2}\sin^2\psi\, d\psi. \tag{322}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2\psi\, d\psi = J', \tag{323}$$

so ist naturlich auch

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2\psi\, d\psi = J'. \tag{324}$$

Addieren wir die Gl. 323 und 324, so finden wir somit

$$\int_0^{\pi/2} d\psi = 2J', \tag{325}$$

also

$$J' = \frac{\pi}{4}. \tag{326}$$

Für genügend kleine Amplitudenwinkel kann schließlich der Sinus durch den im Bogenmaß gemessenen Winkel selbst ersetzt werden. Es wird also dann

$$J = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\cdot\frac{\alpha^2}{4}. \tag{327}$$

Daher wird gemäß Gl. 319 näherungsweise

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) \tag{328}$$

(vgl. Gl. 64 des § 53).

§ 203. Der Fall längs einer Zykloide.

Eine Zykloide entsteht, wie schon in § 11 erwähnt wurde, durch Superposition einer gleichförmigen geradlinigen und einer gleichförmigen Kreisbewegung. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung mit w und den Kreisradius mit a, so ist die lineare Geschwindigkeit eines Punktes des Kreisumfangs gleich wa, und ebenso groß ist natürlich auch die Geschwindigkeit der geradlinigen Bewegung. Nennen wir ferner τ die Zeit bei der fingierten Bewegung, durch die wir uns die Zykloide erzeugt denken, und gebrauchen wir für das Produkt $w\tau$ die Abkürzung u, so ist, wenn wir in Fig. 229 den Koordinatenursprung in den tiefsten Punkt der Zykloide verlegen und die Richtung der geradlinigen Bewegung zur x-Achse machen, für die Punkte der Zykloide

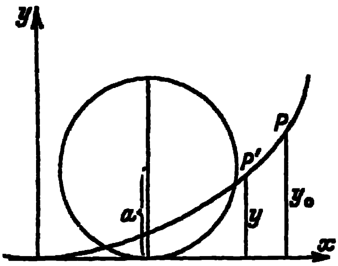


Fig. 229.

$$\left.\begin{aligned} x &= au + a\sin u \\ y &= a - a\cos u\,. \end{aligned}\right\} \tag{329}$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach dem Parameter u:

$$dx = (a + a\cos u)\,du \tag{330}$$

oder nach Gl. 329

$$dx = (2a - y)\,du\,. \tag{331}$$

Andererseits finden wir aus Gl. 329 durch Differentiation nach dem Parameter u

$$dy = a\sin u\,du\,. \tag{332}$$

Nun ist aber nach Gl. 329

$$a\cos u = a - y \tag{333}$$

und somit

$$a\sin u = \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 u} = \sqrt{y(2a-y)}\,. \tag{334}$$

Infolgedessen wird

$$dy = \sqrt{y(2a-y)}\,du\,, \tag{335}$$

also gemäß Gl. 331

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}\,. \tag{336}$$

Das Kurvenelement der Zykloide ist aber

$$ds = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,, \tag{337}$$

also nach Gl. 336

$$ds = dy\sqrt{\frac{2a}{y}}\,. \tag{338}$$

Wir nehmen nun an, daß ein Massenpunkt längs eines Zykloidenbogens reibungslos von einem Punkte P mit der Ordinate y_0 als Anfangspunkt der Bewegung bis zu einem Punkte P' mit der variablen Ordinate y falle. Die Geschwindigkeit v, mit der der Massenpunkt in P' anlangt, ist dann nach dem Satze von der Erhaltung der Energie durch die Beziehung bestimmt

$$\tfrac{1}{2} v^2 = g (y_0 - y), \tag{339}$$

wenn g wieder die Beschleunigung des freien Falls bedeutet. Die Zeit dt, die der Massenpunkt an dem Orte P' zum Durchlaufen eines Kurvenelementes ds braucht, ist also als Quotient ds/v gemäß den Gleichungen (338) und (339) durch die Beziehung bestimmt

$$dt = dy \sqrt{\frac{a}{g y (y_0 - y)}}. \tag{340}$$

Somit ergibt sich für die Zeit, die der Massenpunkt zu dem Hinabfallen von dem Punkte P bis zu der **tiefsten** Stelle der Zykloide braucht, der Wert

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{y (y_0 - y)}}. \tag{341}$$

Nun ist nach einer bekannten elementaren Formel der Integralrechnung

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y y_0 - y^2}} = \arcsin \left(\frac{2y - y_0}{y_0} \right). \tag{342}$$

Für $y = 0$ nimmt somit das Integral der Gl. 341 den Wert $-\pi/2$ an und für $y = y_0$ den Wert $+\pi/2$. Daher wird das bestimmte Integral der Gl. 341 gleich π, und somit wird

$$t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{343}$$

Die **Fallzeit** erweist sich also tatsächlich als **unabhängig** von der **Fallhöhe**.

Da die **Schwingungsdauer** eines **Zykloidenpendels** (T) **viermal** so groß wie t sein muß, können wir T in der Form darstellen

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}}. \tag{344}$$

Das Zykloidenpendel schwingt also bei kleinen Elongationen isochron mit einem gewöhnlichen Pendel, dessen Länge **viermal** so groß ist wie der Radius des die Zykloide erzeugenden Kreises. Dieses

Ergebnis ist übrigens nur ein anderer Ausdruck der geometrischen Tatsache, daß im Scheitel einer Zykloide der Krümmungsradius viermal so groß wie der Halbmesser des erzeugenden Kreises ist.

§ 204. Die gedämpfte Pendelschwingung.

Wirkt auf einen schwingenden Massenpunkt einerseits eine Kraft, die seiner Entfernung von einer Ruhelage proportional ist, und andererseits eine der Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft, die seine Schwingungen dämpft, so lautet die Bewegungsgleichung des Massenpunktes in vektorieller Schreibweise

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -m a^2 \mathfrak{r} - C\mathfrak{v}; \tag{345}$$

dabei ist $\mathfrak{r}$ der von der Ruhelage zu dem Massenpunkt gezogene Radiusvektor, a^2 ein stets positiver Faktor, C eine charakteristische Reibungskonstante. Das erste Glied der rechten Seite hat deshalb ein negatives Vorzeichen, weil ja die Kraft zu der Ruhelage hin gerichtet ist, also entgegengesetzt gerichtet ist wie der Vektor $\mathfrak{r}$.

Gehen wir von der vektoriellen zu der in diesem Falle zweckmäßigeren analytischen Schreibweise über, und bezeichnen wir den Quotienten aus C und m mit k, so ergibt sich somit die Bewegungsgleichung des gedämpft schwingenden Pendels in der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + a^2x = 0. \tag{346}$$

Zu der Lösung dieser linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung gelangen wir durch den Ansatz

$$x = e^{\gamma t}, \tag{347}$$

wodurch wir zur Bestimmung von γ die quadratische Gleichung erhalten

$$\gamma^2 + k\gamma + a^2 = 0. \tag{348}$$

Ihre Wurzeln sind

$$\gamma = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - a^2}, \tag{349}$$

und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (346) lautet demnach (wenn wir mit A_1 und A_2 zwei Konstanten bezeichnen)

$$x = e^{-\frac{k}{2}t}\left[A_1 e^{t\sqrt{\frac{k^2}{4}-a^2}} + A_2 e^{-t\sqrt{\frac{k^2}{4}-a^2}}\right]. \tag{350}$$

Wenn $\frac{k}{2} \geqq a$ ist, sind die in den Exponenten auftretenden Wurzelausdrücke reell, die Schwingung ist also dann aperiodisch. Sonst werden die Wurzelausdrücke imaginär, und wir können

dann die bekannte Moivresche Formel anwenden, derzufolge

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{351}$$

ist (wenn wir in üblicher Weise unter i die Quadratwurzel aus —1 verstehen). Setzen wir dann zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{k^2}{4} - a^2} = i\eta, \tag{352}$$

so wird also, falls $\frac{k}{2} < a$ ist,

$$x = e^{-\frac{k}{2}t}[(A_1 + A_2)\cos(\eta t) + i(A_1 - A_2)\sin(\eta t)]. \tag{353}$$

Wir setzen nun etwa, indem wir dadurch zwei neue Größen A und δ einführen,

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= A \sin\delta \\ A_1 - A_2 &= A \cos\delta. \end{aligned}\right\} \tag{354}$$

Da in Gl. 353 sowohl der reelle Teil als auch der imaginäre (nach Fortlassung des Faktors i) eine Lösung darstellt, erhalten wir demnach die endgültige Lösung der Differentialgleichung (346), indem wir den reellen und den imaginären Teil der Gl. 353 (letzteren unter Fortlassung von i) addieren. So ergibt sich die Beziehung

$$x = A e^{-\frac{k}{2}t} \sin(\eta t + \delta). \tag{355}$$

Schließlich können wir auch noch die Phasenkonstante δ durch geeignete Wahl des Nullpunktes der Zeitmessung beseitigen.

Die Periode der gedämpften Schwingung ergibt sich aus Gl. 355 zu

$$\tau = \frac{2\pi}{\eta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - \frac{k^2}{4}}} \tag{356}$$

(vgl. Gl. 77 des § 64).

§ 205. Die erzwungene Pendelschwingung.

Wirkt auf das schwingende Pendel außer der Schwerkraft noch eine **periodische äußere Kraft**, so ist in der Differentialgleichung (346) die rechte Seite anstatt Null dem Ausdruck $P \sin(pt)$ gleich zu setzen, wobei P den Quotienten aus der x-Komponente der Kraft und der Masse bedeutet. Gl. 346 verwandelt sich dann in die **inhomogene Differentialgleichung***):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + a^2x = P \sin(pt). \tag{357}$$

*) Die Gl. 357 ist deshalb inhomogen, weil ihre rechte Seite die unbekannte Funktion x nicht enthält.

Wir machen, um die Lösung dieser Differentialgleichung zu finden, zunächst den Ansatz

$$x = R \sin(pt + \delta). \tag{358}$$

Wir finden dann durch Differentiation nach der Zeit

$$\frac{dx}{dt} = Rp \cos(pt + \delta) \tag{359}$$

und durch abermalige Differentiation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Rp^2 \sin(pt + \delta). \tag{360}$$

Setzen wir die Werte aus den Gl. 358, 359 und 360 in die Gl. 357 ein, so nimmt diese nach einfachen Umformungen die Gestalt an

$$\sin(pt+\delta)[Ra^2 - Rp^2 - P\cos\delta] + \cos(pt+\delta)[Rkp + P\sin\delta] = 0. \tag{361}$$

Für jeden beliebigen Wert von t kann diese Gleichung aber nur dann erfüllt sein, wenn die beiden Ausdrücke in den eckigen Klammern verschwinden. Es müssen also die beiden Gleichungen gelten

$$P\cos\delta = R(a^2 - p^2) \tag{362}$$

und

$$P\sin\delta = -kpR. \tag{363}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{kp}{p^2 - a^2} \tag{364}$$

und

$$R = -\frac{P}{\sqrt{(p^2 - a^2)^2 + k^2p^2}}. \tag{365}$$

Setzen wir diese Werte in die Gl. 358 ein, so ergibt sich die Formel, die die erzwungene Schwingung beschreibt; die erzwungene Schwingung lagert sich über die gedämpfte Schwingung, die durch die homogene Differentialgleichung 346 (oder Gl. 355) beschrieben wird. In der Tat folgt auch aus der Theorie der Differentialgleichungen, daß das allgemeine Integral der inhomogenen Differentialgleichung (357) die Summe aus dem allgemeinen Integral der homogenen Differentialgleichung (346) und dem durch Gl. 358 dargestellten partikularen Integral der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Bezeichnen wir die Frequenz der anregenden Schwingung mit ν, so ist natürlich

$$2\pi\nu = p. \tag{366}$$

In analoger Weise hängt die „Eigenfrequenz" des Pendels ν_0 mit

der Konstante a zusammen*). Ersetzen wir in den Gleichungen (364) und (365) derart p und a durch ν und ν_0. so ergeben sich die schon in einem früheren Abschnitt (§ 67) angegebenen Gleichungen (83) und (84).

§ 206. Die östliche Fallabweichung.

Da bei dem freien Fall die Fallrichtung und die Richtung der Erdachse miteinander einen Winkel einschließen, der zu der geographischen Breite (ψ) komplementär ist, so ergibt sich nach Gl. 31 für den freien Fall die durch die Erdrotation hervorgerufene Coriolis-Beschleunigung zu

$$b_{Cor} = 2\,v\,w \cos\psi. \tag{367}$$

Nun ist aber die Geschwindigkeit gleich dem Produkt aus der Beschleunigung des freien Falls (g) und der Zeit, und daher wird, wenn wir die x-Achse horizontal ostwärts legen,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,g\,t\,w \cos\psi. \tag{368}$$

Hieraus folgt durch zweimalige Integration

$$x = \frac{g\,w\,t^3 \cos\psi}{3}. \tag{369}$$

Ersetzen wir in dieser Formel die Fallzeit durch die Fallhöhe auf Grund der Beziehung $h = \frac{1}{2} g t^2$, so erhalten wir die in § 81 angegebene Gl. 101.

Bei dem vertikalen Wurf nach aufwärts ist für die Geschwindigkeit in der Gl. 367 der Wert

$$v = u - gt \tag{370}$$

einzusetzen, wenn u die Wurfgeschwindigkeit bedeutet. Daher tritt an die Stelle der Gl. 368 nunmehr die Beziehung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,w\,(u - gt) \cos\psi, \tag{371}$$

und hieraus folgt durch zweimalige Integration

$$x = w \cos\psi \left(u t^2 - \frac{1}{3} g t^3\right). \tag{372}$$

In dieser Gleichung ist nun für t, wenn wir die resultierende Ab-

---

*) Denn der Differentialgleichung $d^2x/dt^2 = -a^2x$ genügt die Lösung $x = A \sin(at)$, wobei A eine beliebige Konstante bedeutet. Diese Schwingung erfolgt aber wieder mit der Frequenz $2\pi/a$.

weichung in dem Ausgangsniveau ermitteln wollen, die doppelte Steigdauer, also 2 u/g einzusetzen. Dann wird

$$x = \frac{4}{3}\, w \cos\psi \frac{u^3}{g^2}. \tag{373}$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung u durch die Steighöhe mittels der Beziehung $h = u^2/2g$, so finden wir

$$x = \frac{8\sqrt{2}}{3} \frac{h\sqrt{h}}{\sqrt{g}}\, w \cos\psi. \tag{374}$$

Ein Vergleich mit Gl. 101 zeigt in der Tat, daß diese **westliche Abweichung viermal** so groß ist wie die östliche Abweichung bei einem freien Fall durch die gleiche Höhe.

Da bei einer Horizontalbewegung die Bewegungsrichtung mit einer zur Erdachse parallelen Richtung einen Winkel einschließt, der der geographischen Breite gleich ist, wird in diesem Spezialfall gemäß Gl. 31 die Coriolis-Beschleunigung gleich $2vw \sin\psi$. Setzen wir diesen Ausdruck gleich d^2x/dt^2, so erhalten wir durch zweimalige Integration die Gl. 103 des § 82.

§ 207. Die Ableitung des Newtonschen Gravitationsgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen.

Aus der Konstanz der Flächengeschwindigkeit der Planetenbewegungen folgt gemäß dem in § 198 durchgeführten Beweis ohne weiteres, daß die **Beschleunigung der Planeten zu der Sonne gerichtet** ist. Der Betrag dieser Beschleunigung ergibt sich aus dem zweiten **Keplerschen** Gesetz, demzufolge die Planetenbahnen Ellipsen sind, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet. Bezeichnen wir mit $2\mathfrak{h}$ die gerichtete Strecke, die von der Sonne zu dem anderen Brennpunkt der Ellipse gezogen wird, und mit $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p}$ die Radienvektoren, die von der Sonne und dem zweiten Brennpunkt zu dem Planeten führen (Fig. 230), ferner mit a und b die halbe große und die halbe kleine Achse der Ellipse, so ist nach der Definition der Ellipse

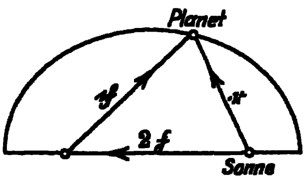


Fig. 230.

$$r + p = 2a; \tag{375}$$

andererseits ist

$$p^2 = r^2 + 4h^2 - 4\mathfrak{r}\mathfrak{h}. \tag{376}$$

Indem wir diesen Wert für p in die Gl. 375 einsetzen und quadrieren, finden wir

$$r^2 + 4a^2 - 4ar = r^2 + 4h^2 - 4\mathfrak{r}\mathfrak{h} \tag{377}$$

oder, da

$$a^2 - h^2 = b^2 \tag{378}$$

ist,

$$\mathfrak{r}\mathfrak{h} = ar - b^2. \tag{379}$$

Differenzieren wir nun zweimal nach der Zeit, so finden wir (weil ja a, b und $\mathfrak{h}$ als konstant anzusehen sind)

$$\mathfrak{h}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = a\frac{d^2r}{dt^2}. \tag{380}$$

Bezeichnen wir mit q den Betrag der Beschleunigung*), und mit γ den Winkel, den die Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{h}$ miteinander einschließen, so wird die linke Seite der Gl. 380 gleich $-hq\cos\gamma$ (denn $d^2\mathfrak{r}/dt^2$ ist ja nichts anderes als der Vektor der Beschleunigung; das negative Vorzeichen ist aber deshalb zu wählen, weil die Beschleunigung entgegengesetzt wie der Vektor $\mathfrak{r}$ gerichtet ist, nämlich, wie wir schon abgeleitet haben, zu der Sonne hin). Es wird also

$$q = -\frac{a}{h\cos\gamma}\frac{d^2r}{dt^2}. \tag{381}$$

Nach Gl. 379 ist aber

$$h\cos\gamma = a - \frac{b^2}{r}, \tag{382}$$

und somit finden wir, indem wir nach der Zeit differenzieren,

$$-h\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt} = \frac{b^2}{r^2}\frac{dr}{dt}. \tag{383}$$

Das Produkt aus $d\gamma/dt$ und r^2 stellt aber nun die doppelte Flächengeschwindigkeit dar, die nach dem ersten Keplerschen Gesetz konstant ist. Bezeichnen wir die doppelte Flächengeschwindigkeit mit F, so wird also

$$-hF\sin\gamma = b^2\frac{dr}{dt}. \tag{384}$$

Hieraus folgt durch abermalige Differentiation nach der Zeit

$$-hF\cos\gamma\frac{d\gamma}{dt} = b^2\frac{d^2r}{dt^2} \tag{385}$$

oder, indem wir wieder für $d\gamma/dt$ den Wert F/r^2 einsetzen,

$$\frac{-hF^2\cos\gamma}{r^2} = b^2\frac{d^2r}{dt^2}. \tag{386}$$

*) Der sonst für die Beschleunigung übliche Buchstabe b kann hier nicht verwendet werden, weil er bereits für die halbe kleine Achse, die auch stets mit b bezeichnet wird, gebraucht wurde.

Ein Vergleich mit Gl. 381 ergibt für den Betrag der Beschleunigung die Beziehung

$$q = \frac{aF^2}{b^2 r^2}. \tag{387}$$

Bezeichnen wir schließlich mit T die Umlaufszeit des Planeten, so wird der Flächeninhalt der Ellipse

$$ab\pi = \tfrac{1}{2} FT. \tag{388}$$

Ersetzen wir in der Gl. 387 mittels dieser Formel F durch T, so finden wir

$$q = \frac{4\pi^2 a^3}{r^2 T^2}. \tag{389}$$

Bezeichnen wir nun das nach dem dritten Keplerschen Gesetz für alle Planeten gleiche Verhältnis zwischen der dritten Potenz der halben großen Achse und dem Quadrat der Umlaufszeit mit C, so erhalten wir die bereits in § 86 angegebene Gl. 111.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Die mechanischen Grundgleichungen der Massenpunktsysteme.

§ 208. Die Erhaltung des Schwerpunkts.

Es sei m_h die Masse eines beliebigen, einem System angehörigen Massenpunktes, $\mathfrak{K}_h$ die Resultierende aus allen an ihm angreifenden äußeren Kräften und $\mathfrak{K}'_{hk}$ die innere Kraft, die auf ihn der Massenpunkt mit der Nummer k ausübt. Die Bewegungsgleichung des h-ten Massenpunktes hat dann die Form:

$$m_h \frac{d\mathfrak{v}_h}{dt} = \mathfrak{K}_h + \sum_{k=1}^{k=n}{}' \mathfrak{K}'_{hk}. \tag{390}$$

Die Summe ist dabei, wenn das System aus n Massenpunkten besteht, über alle Werte von k von 1 bis n zu bilden, jedoch mit Ausschluß des Wertes k = h, was durch den Strich neben dem Summenzeichen angedeutet ist.

Bezeichnen wir andererseits die Kraft, die der h-te Massenpunkt auf den k-ten ausübt, mit $\mathfrak{K}'_{kh}$, so ist nach dem Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion

$$\mathfrak{K}'_{kh} = -\mathfrak{K}'_{hk}. \tag{391}$$

Bilden wir also die Gl. 390 für alle Werte von h von 1 bis n und

addieren wir dann, so verschwindet die Doppelsumme des letzten Gliedes, und wir erhalten die Beziehung

$$\sum\left(m_h \frac{d\mathfrak{v}_h}{dt}\right) = \sum \mathfrak{K}_h, \tag{392}$$

oder auch, da die Massen von der Zeit unabhängig sind.

$$\frac{d}{dt}\sum(m_h \mathfrak{v}_h) = \sum \mathfrak{K}_h. \tag{393}$$

Der zeitliche Differentialquotient der gesamten Bewegungsgröße ist also gleich der vektoriellen Summe aller äußeren Kräfte. Bei dem Fehlen äußerer Kräfte bleibt daher die gesamte Bewegungsgröße ungeändert.

Übertragen wir die Gl. 393 aus der vektoriellen in die analytische Schreibweise, so finden wir

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum(m_h x_h) = \sum X_h. \tag{394}$$

Nun ist aber, wenn wir die x-Koordinate des Schwerpunktes mit ξ bezeichen, nach Gl. 54

$$\xi = \frac{\sum m_h x_h}{\sum m_h}, \tag{395}$$

und daher kann die Gl. 394 auch in der Form geschrieben werden

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}\sum m_h = X_h. \tag{396}$$

Diese Gleichung, zu der noch zwei analoge für η und ζ hinzukommen, zeigt, daß sich das System so verhält, als ob seine ganze Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre, und in diesem die äußeren Kräfte angreifen würden, während die inneren in Wegfall kommen. Bei dem Fehlen äußerer Kräfte muß daher der Schwerpunkt ruhen oder geradlinig gleichförmig fortschreiten.

§ 209. Die Erhaltung des Drehimpulses.

Von einem festen Bezugspunkte mögen zu den beiden Massenpunkten des Systems mit den Nummern h und k Radienvektoren $\mathfrak{r}_h$ und $\mathfrak{r}_k$ führen; mit $\mathfrak{r}_{hk}$ werde die gerichtete Strecke bezeichnet, die von dem h-ten zu dem k-ten Massenpunkt gezogen wird. Dann ist

$$\mathfrak{r}_k = \mathfrak{r}_h + \mathfrak{r}_{hk}. \tag{397}$$

Wir wollen nun die Bewegungsgleichung des h-ten Massenpunktes (Gl. 390) vektoriell mit $\mathfrak{r}_h$ multiplizieren. Wir finden

dann, wenn wir den Drehimpuls des Massenpunktes mit $\mathfrak{U}_h$ und das statische Moment von $\mathfrak{K}_h$ mit $\mathfrak{M}_h$ bezeichnen*),

$$\frac{d\mathfrak{U}_h}{dt} = \mathfrak{M}_h + \sum{}' [\mathfrak{r}_h \cdot \mathfrak{K}'_{hk}]. \tag{398}$$

Aus den Gleichungen 391 und 397 folgt aber nun

$$[\mathfrak{r}_h \cdot \mathfrak{K}'_{hk}] + [\mathfrak{r}_k \cdot \mathfrak{K}'_{kh}] = -[\mathfrak{r}_{hk} \cdot \mathfrak{K}'_{hk}]. \tag{399}$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, daß die Doppelsumme, zu der die Summierung der Gl. 398 führt, dann verschwinden muß, wenn die inneren Kräfte Zentralkräfte sind. Wenn sie nämlich in die Richtungen der Verbindungslinien fallen, ist das Vektorprodukt auf der rechten Seite der Gl. 399 gleich Null; dann gilt also nach Gl 398 die einfache Beziehung

$$\frac{d}{dt}\sum \mathfrak{U}_h = \sum \mathfrak{M}_h. \tag{400}$$

Diese Gleichung drückt den Satz von der Erhaltung des gesamten Drehimpulses aus**).

Es läßt sich aber auch leicht beweisen, daß bei ruhendem Schwerpunkt der Wert des Drehimpulses von dem Bezugspunkt unabhängig ist. Es sei etwa $\mathfrak{U}$ der Wert in bezug auf einen Bezugspunkt Q, und zu ermitteln sei der Wert $\mathfrak{U}'$ in bezug auf einen Bezugspunkt Q', zu dem von Q die gerichtete Strecke $\mathfrak{h}$ führe. Dann ist, wenn wir die gesamte Bewegungsgröße mit $\mathfrak{G}$ bezeichnen, nach der Definition des Drehimpulses

$$\mathfrak{U}' = \mathfrak{U} - [\mathfrak{h}\,\mathfrak{G}]. \tag{401}$$

Bei ruhendem Schwerpunkt verschwindet aber $\mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{U}'$ dann gleich $\mathfrak{U}$ wird.

§ 210. Die Erhaltung der Energie.

Multiplizieren wir die Bewegungsgleichung des h-ten Massenpunktes (Gl. 390) skalar mit der Geschwindigkeit dieses Massenpunktes ($\mathfrak{v}_h$) und mit dt, und beachten wir, daß das Produkt $\mathfrak{v}_h dt$ das von dem Massenpunkt beschriebene Wegelement $d\mathfrak{s}_h$ darstellt, so finden wir

$$d\left(\frac{m_h v_h^2}{2}\right) = \mathfrak{K}_h d\mathfrak{s}_h + \sum \mathfrak{K}'_{hk} \cdot d\mathfrak{s}_h. \tag{402}$$

Existiert nun ein sogenanntes inneres Potential, derart,

*) Vgl. Gl. 274.

**) Auch dann bleibt der Drehimpuls natürlich konstant, wenn die Kräfte ständig zu dem festen Punkte gerichtet sind, auf den der Drehimpuls bezogen wird.

daß seine negative partielle Ableitung nach x_h die x-Komponente der gesamten an dem h-ten Massenpunkt angreifenden inneren Kraft ergibt, und gilt Analoges auch für alle übrigen Koordinaten, so wird bei der Summierung über alle Massenpunkte die dann als letztes Glied auftretende Doppelsumme einfach gleich dem negativen Differential des inneren Potentials (V_i). Existiert auch ein äußeres Potential, so wird wiederum die Summe des ersten Gliedes der rechten Seite der Gl. 402 gleich dem negativen Differential des äußeren Potentials (V_a). Bezeichnen wir schließlich die gesamte lebendige Kraft des Systems mit L, so ergibt die Summierung der Gl. 402 die Beziehung

$$dL = -dV_a - dV_i. \tag{403}$$

Durch Integration erhalten wir die die Erhaltung der Energie ausdrückende Formel

$$L + V_a + V_i = \text{Const.} \tag{404}$$

Auch die lebendige Kraft laßt sich übrigens in einen inneren und äußeren Teil zerlegen. Sind etwa ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunktes und x', y', z' die Koordinaten in bezug auf ein durch den Schwerpunkt als Ursprung gelegtes Koordinatensystem (das dem ursprunglichen parallel ist), so ist

$$\tfrac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\sum m + \frac{d\xi}{dt}\frac{d}{dt}\sum m x' + \tfrac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2. \tag{405}$$

Nach der Definition des Schwerpunkts ist aber nun $\sum mx'$ nichts anderes als das Produkt aus der Gesamtmasse und der x'-Koordinate des Schwerpunkts, die aber verschwindet, weil ja der Schwerpunkt der Ursprung des x'-y'-z'-Koordinatensystems ist. Da also das zweite Glied der rechten Seite der Gleichung wegfällt, erscheint die lebendige Kraft aus zwei Teilen zusammengesetzt. Der erste Teil ist die kinetische Energie, die die Gesamtmasse hätte, wenn sie mit der Geschwindigkeit des Schwerpunkts bewegt wäre, also die „äußere" lebendige Kraft; der zweite Teil ist die „innere" lebendige Kraft, nämlich die kinetische Energie in bezug auf das durch den Schwerpunkt gelegte Koordinatensystem.

§ 211. Die potentielle Energie eines gravitierenden Systems.

Betrachten wir zwei gegeneinander gravitierende Massenpunkte, so läßt sich leicht zeigen, daß die potentielle Energie des aus den beiden Massenpunkten gebildeten Systems durch den Ausdruck gegeben ist

$$V = -f\frac{m_1 m_2}{r}, \tag{406}$$

wenn r den wechselseitigen Abstand und f die Gravitationskonstante bedeutet.

Ist nämlich $\mathfrak{r}$ die gerichtete Strecke, die von dem ersten zu dem zweiten Massenpunkt gezogen wird, so ist die auf den ersten Punkt wirkende Anziehungskraft

$$\mathfrak{K}_1 = f\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathfrak{r}}{r} \tag{407}$$

(wobei $\mathfrak{r}/r$ wieder einen Einheitsvektor darstellt). Nun sind aber die Komponenten von $\mathfrak{r}$ gleich $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Daher wird die x-Komponente der Kraft $\mathfrak{K}_1$

$$X_1 = f m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{r^3}. \tag{408}$$

Andererseits ist

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{409}$$

und somit

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{x_2 - x_1}{r}. \tag{410}$$

Daher wird

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -f m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{r^3}. \tag{411}$$

Wie ein Vergleich der Gl. 411 mit der Gl. 408 zeigt, ist in der Tat

$$X_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}. \tag{412}$$

Da sich der Wert von V in Gl. 406 nicht ändert, wenn die Indizes 1 und 2 vertauscht werden, so erscheint ebenso X_2 als negativer partieller Differentialquotient von V nach x_2, womit es bewiesen erscheint, daß der in Gl. 406 für V angegebene Ausdruck die innere potentielle Energie des betrachteten Zwei-Körper-Systems darstellt.

Haben wir ein System von n Massenpunkten, so wird

$$V = -\tfrac{1}{2} f \sum_{h=1}^{h=n} {\sum_{k=1}^{k=n}}' \frac{m_h m_k}{r_{hk}}. \tag{413}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ muß deshalb noch hinzugefügt werden, weil ja in der Doppelsumme jeder Massenpunkt zweimal vorkommt, einmal als m_h und das andere Mal als m_k.

§ 212. Der analytische Ausdruck des Prinzips der virtuellen Verrückungen.

Als notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines Systems erscheint nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen das Verschwinden der Arbeit bei einer unendlich

kleinen, mit den gegebenen Bedingungen verträglichen Verrückung. Sind also insgesamt n Massenpunkte vorhanden und ist $\delta \mathfrak{s}_h$ das Wegelement*), das bei einer solchen virtuellen Verrückung des Systems der h-te Massenpunkt beschreiben würde, ist ferner $\mathfrak{K}_h$ die an diesem Massenpunkt angreifende äußere Kraft, so lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$\sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{K}_h \, \delta \mathfrak{s}_h = 0 \tag{414}$$

oder in analytischer Schreibweise

$$\sum_{h=1}^{h=n} (X_h \, \delta x_h + Y_h \, \delta y_h + Z_h \, \delta z_h) = 0. \tag{415}$$

wenn x_h, y_h, z_h die Koordinaten des h-ten Massenpunktes sind und X_h, Y_h, Z_h die Komponenten der an ihm angreifenden Kraft.

Der exakte mathematische Ausdruck des Prinzips der virtuellen Verrückungen (in der Form der Gl. 415) stammt von Lagrange (1788)**).

§ 213. Die allgemeine Bewegungsformel von Lagrange.

Aus der statischen Grundformel (Gl. 415) ergibt sich, wie Lagrange zeigte, die allgemeine Bewegungsformel durch Anwendung des Prinzips von d'Alembert. Denn die statische Grundformel behält nach diesem Prinzip ihre Gültigkeit auch für den Fall der Bewegung, wofern in ihr die angreifenden durch die verlorenen Kräfte ersetzt werden. Diese sind (nach § 40) durch die vektoriellen Unterschiede zwischen den angreifenden Kräften und den mit den Massen multiplizierten tatsächlichen Beschleunigungen bestimmt. In vektorieller Schreibweise ergibt sich also aus Gl. 414 die allgemeine Bewegungsformel in der Form

$$\sum_{h=1}^{h=n} \left\{ \left(\mathfrak{K}_h - m_h \frac{d \mathfrak{v}_h}{dt} \right) \delta \mathfrak{s}_h \right\} = 0. \tag{416}$$

Die entsprechende analytische Schreibweise lautet:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \left\{ \left(X_h - m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} \right) \delta x_h + \left(Y_h - m_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} \right) \delta y_h + \left(Z_h - m_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} \right) \delta z_h \right\} = 0. \tag{417}$$

Soll diese Universalformel angewendet werden, so muß sie mit den für das System geltenden sogenannten Bedingungsglei-

---

*) Das Wegelement wird hier deshalb als Variation und nicht als Differential angesehen, also mit $\delta \mathfrak{s}$ statt mit $d \mathfrak{s}$ bezeichnet, weil jede Beziehung zur Zeit fehlt.

**) Lagrange, Mécanique analytique.

chungen kombiniert werden, in denen die Beschränkungen der Bewegungsfreiheit des Systems ihren analytischen Ausdruck finden. Da die Kräfte in diesen Gleichungen natürlich nicht vorkommen, sind die Gleichungen, wofern sie (wie wir annehmen wollen) auch von der Zeit unabhängig sind, von der Form

$$F_1(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots x_n, y_n, z_n) = 0. \tag{418}$$

Um mittels dieser Gleichungen*) die Variationen von Koordinaten durch diejenigen anderer zu ersetzen, variiert man die Gleichungen und erhält so neue Gleichungen von der Form

$$\sum_{h=1}^{h=n} \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial x_h} \delta x_h + \frac{\partial F_1}{\partial y_h} \delta y_h + \frac{\partial F_1}{\partial z_h} \delta z_h \right\} = 0. \tag{419}$$

§ 214. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der ersten Form.

Um aus der dynamischen Universalformel (Gl. 417) die Bewegungsgleichungen der einzelnen, zu dem System gehörigen Massenpunkte zu erhalten, kann man sich zweckmäßig der von Lagrange ersonnenen sogenannten Methode der unbestimmten Multiplikatoren bedienen.

Man multipliziert hierzu jede der variierten Bedingungsgleichungen mit einem zunächst noch unbestimmt gelassenen Faktor, der etwa μ_1 genannt werde, und addiert sie sodann zu der allgemeinen Bewegungsformel hinzu. Ist die Zahl der voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen s, ist also gemäß § 41 die Zahl der Freiheitsgrade 3n—s, so ergibt sich derart die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \sum_{h=1}^{h=n} \Bigg\{ &\left(X_h - m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} + \sum_{1=1}^{1=s} \mu_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_h} \right) \delta x_h \\ &+ \left(Y_h - m_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} + \sum_{1=1}^{1=s} \mu_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_h} \right) \delta y_h \\ &+ \left(Z_h - m_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} + \sum_{1=1}^{1=s} \mu_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_h} \right) \delta z_h \Bigg\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{420}$$

Da s Multiplikatoren unbestimmt gelassen wurden, so daß über sie frei verfügt werden kann, und da andererseits das System (3n—s) Freiheitsgrade hat, also ebensoviel Koordinaten als unabhängig angesehen werden dürfen, so müssen, wenn wir dementsprechend die Multiplikatoren wählen, alle 3n Klammerausdrücke der

*) Bei speziellen Beispielen werden natürlich keineswegs alle Bedingungsgleichungen sämtliche 3n Koordinaten enthalten.

Gl. 420 einzeln verschwinden. Dadurch erhalten wir die sogenannten **Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der ersten Form** für die n Massenpunkte, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} m_h \frac{d^2 x_h}{d t^2} &= X_h + \sum_{l=1}^{l=s} \mu_l \frac{\partial F_l}{\partial x_h} \\ m_h \frac{d^2 y_h}{d t^2} &= Y_h + \sum_{l=1}^{l=s} \mu_l \frac{\partial F_l}{\partial y_h} \\ m_h \frac{d^2 z_h}{d t^2} &= Z_h + \sum_{l=1}^{l=s} \mu_l \frac{\partial F_l}{\partial z_h}. \end{aligned}\right\} \tag{421}$$

Die letzten Glieder der Gleichungen stellen derart die fingierten **Zusatzkräfte** dar, die man sich an den Massenpunkten noch angreifend denken muß, wofern man die tatsächlich unfreien Massenpunkte wie freie behandeln will.

Zur Veranschaulichung der Methode der unbestimmten Multiplikatoren möge als besonders einfaches **Beispiel** die **Atwoodsche Fallmaschine** dienen. Über eine Rolle sei ein Faden von der Länge l geführt, an dessen Enden die Massen m_1 und m_2 hängen mögen. Die z-Achse gehe vertikal nach aufwärts. Dann haben wir nur eine Bedingungsgleichung, nämlich

$$z_1 + z_2 + l = 0. \tag{422}$$

x_1, x_2, y_1, y_2 verschwinden, weil ja die beiden Massen immer in der vertikalen x-y-Ebene bleiben. Aus der Gl. 422 folgt wegen der Konstanz der Fadenlänge

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial z_2} = 1. \tag{423}$$

Da auch X_1, Y_1, X_2, Y_2 verschwinden, Z_1 gleich $-m_1 g$ und Z_2 gleich $-m_2 g$ sind, lauten demnach die Bewegungsgleichungen der beiden Gewichte

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 z_1}{d t^2} &= -m_1 g + \mu \\ m_2 \frac{d^2 z_2}{d t^2} &= -m_2 g + \mu. \end{aligned}\right| \tag{424}$$

Aus Gl. 422 folgt nun sogleich, daß die beiden in den Gleichungen (424) auftretenden zweiten Differentialquotienten einander entgegengesetzt sind. Durch Subtraktion der beiden Gleichungen finden wir also für den gleichen Betrag der beiden Beschleunigungen

$$b = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{425}$$

Setzen wir diesen Wert für d^2z_2/dt^2 ein (denn nach aufwärts geht die kleinere Masse), so finden wir

$$\mu = \frac{2\,m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g. \tag{426}$$

Durch diesen Ausdruck ist die Zusatzkraft dargestellt, die außer dem eigenen Gewicht noch auf jede der beiden Massen infolge der Verbindung mit der anderen Masse wirkt.

§ 215. Das Prinzip des kleinsten Zwanges.

Aus dem Prinzip von d'Alembert läßt sich, wie Gauß (1829) erkannte, leicht ein anderes bemerkenswertes Prinzip ableiten, das nach Gauß als Prinzip des kleinsten Zwanges bezeichnet wird. Diesem Prinzip liegt die Betrachtung der Abweichungen zugrunde, die die tatsächlichen Bewegungen eines unfreien Systems gegenüber den Bewegungen zeigen, die bei dem Fehlen von Beschränkungen durch die angreifenden Kräfte hervorgebracht würden. Das Prinzip des kleinsten Zwanges lehrt, daß die Summe der Produkte aus den einzelnen Massen und den Quadraten ihrer Abweichungen bei der wirklichen Bewegung ein Minimum darstellt; d. h. bei der wirklichen Bewegung ist diese Summe kleiner als bei jeder anderen Bewegung, die ebenfalls mit den gegebenen Beschränkungen der Bewegungsfreiheit des Systems verträglich wäre.

Es sei etwa, wenn wir einen beliebigen Massenpunkt betrachten, $d\mathfrak{s}$ der in dem Zeitelement dt tatsächlich zurückgelegte Weg; hingegen sei $d\mathfrak{p}$ der Weg, den der Massenpunkt unter dem Einfluß der an ihm angreifenden Kraft in demselben Zeitelement zurücklegen würde, wenn er völlig frei wäre. Wir können dann den Vektor $d\mathfrak{p}$ auffassen als geometrische Summe aus dem Vektor $d\mathfrak{s}$ und einem Vektor, der etwa $d\mathfrak{q}$ genannt werde und der die Abweichung darstellt.

Statt der wirklichen denken wir uns nun eine fingierte andere Bewegung, die aber ebenfalls mit den gegebenen Bedingungen verträglich sei. Für diese sei die Abweichung $d\mathfrak{q}'$; wofern diese Bewegung mit den Bedingungen verträglich sein soll, muß

$$d\mathfrak{q}' = d\mathfrak{q} + \delta\mathfrak{s} \tag{427}$$

sein, wobei $\delta\mathfrak{s}$ eine virtuelle Verrückung des Massenpunktes darstellt.

Da der von einer Kraft in einem Zeitelement hervorgebrachte Weg der Beschleunigung proportional ist und die Beschleunigung wiederum der Quotient aus Kraft und Masse ist, so muß auch Proportionalität bestehen zwischen dem Produkt aus Masse und Weg

einerseits und der Kraft andererseits. Da nun die Wege dq durch die **verlorenen Kräfte** hervorgebracht würden. diese aber dem Prinzip der virtuellen Verrückungen genügen, so muß nach Gl. 416 auch die Beziehung bestehen,

$$\sum m_h \cdot dq_h \cdot \delta g_h = 0. \tag{428}$$

Quadrieren wir andererseits die Gl. 427, multiplizieren wir dann mit der Masse des betreffenden Massenpunktes und summieren wir schließlich von $h=1$ bis $h=n$, so finden wir

$$\sum m_h (dq_h')^2 = \sum m_h (dq_h)^2 + 2 \sum m_h dq_h \delta g_h + \sum m_h (\delta g_h)^2. \tag{429}$$

Da aber das zweite Glied der rechten Seite nach Gl. 428 verschwindet und das letzte unbedingt positiv sein muß (weil ja jeder einzelne Summand positiv ist), so ist in der Tat, was zu beweisen war, stets

$$\sum m_h (dq_h')^2 > \sum m_h (dq_h)^2. \tag{430}$$

Zur Veranschaulichung des Prinzips des kleinsten Zwanges möge als ein besonders einfaches **Beispiel** (zu dessen Losung natürlich keineswegs dieses Prinzip nötig ist) die Bewegung an einem **Wellrad** betrachtet werden. Sind die Beschleunigungen an Rad und Welle b_1 und b_2, so sind die Abweichungen in einem Zeitelement dt einfach gleich $\frac{1}{2}(g-b_1)(dt)^2$ und $\frac{1}{2}(g-b_2)(dt)^2$, wobei alle Wegelemente dieselbe Richtung (wenn auch nicht denselben Richtungssinn) haben. Nach dem Satze vom kleinsten Zwange muß also

$$m_1(g-b_1)^2 + m_2(g-b_2)^2 = \text{Minimum} \tag{431}$$

sein.

Nun ist aber am Wellrad, dessen Radien R und r seien,

$$b_2 = -b_1 \frac{r}{R}. \tag{432}$$

Setzen wir dies in die Gl. 431 ein, so finden wir, da ja wegen der Minimaleigenschaft der Differentialquotient der linken Seite nach b_1 verschwinden muß,

$$\frac{d}{db_1}\left[m_1(g-b_1)^2 + m_2\left(g + b_1\frac{r}{R}\right)^2\right] = 0. \tag{433}$$

Es ist also

$$-2m_1 g + 2m_1 b_1 + 2m_2 g \frac{r}{R} + 2m_2 b_1 \frac{r^2}{R^2} = 0. \tag{434}$$

Hieraus folgt

$$b_1\left(m_1 + m_2\frac{r^2}{R^2}\right) = g\left(m_1 - m_2\frac{r}{R}\right) \tag{435}$$

und somit

$$b_1 = Rg \frac{m_1 R - m_2 r}{m_1 R^2 + m_2 r^2} \tag{436}$$

und (nach Gl. 432)

$$b_2 = - rg \frac{m_1 R - m_2 r}{m_1 R^2 + m_2 r^2}. \tag{437}$$

§ 216. Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Zu einem fur die theoretische Dynamik sehr wichtigen Prinzip, das ebenso wie das zuletzt betrachtete ein Minimalprinzip darstellt, gelangt man, wenn man die tatsächliche Bewegung des Systems mit einer unendlich wenig von ihr abweichenden, „variierten“ Bewegung vergleicht, die ebenfalls den vorgeschriebenen Bedingungen genügt, und wenn man dabei die Zeit unvariiert läßt. Mit anderen Worten, es wird die Variation so vorgenommen, daß, wenn A und B benachbarte Punkte der tatsächlichen Bahn sind und A′ und B′ die entsprechenden Punkte der variierten Bahn, dann das Wegelement A′B′ in derselben Zeit zurückgelegt wird wie das Wegelement AB. Ist dies der Fall, so können die beiden Rechenoperationen der Variation der Koordinaten und der zeitlichen Differentiation in ihrer Reihenfolge vertauscht werden*).

Wir formen nun einen in der allgemeinen Bewegungsformel auftretenden Ausdruck mittels der Identität um

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x\right) - \frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}(\delta x). \tag{438}$$

Nun ist aber nach dem vorhin angegebenen Satz über die Vertauschbarkeit der Reihenfolge zweier Rechenoperationen

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \delta\left(\frac{dx}{dt}\right) \tag{439}$$

*) Die Gültigkeit dieses allgemein gültigen Prinzips der Variationsrechnung kann man sich durch folgende einfache Überlegung veranschaulichen: Der Punkt A habe die Koordinate x, der Punkt A′ die Koordinate x_2. Dann ist $x_2 = x + \delta x$. Den Punkten B und B′ mögen die x-Koordinaten x_3 und x_4 zukommen. Dann ist $x_3 = x + \frac{dx}{dt}dt$, und $x_4 = x_3 + \delta x_3$. Andererseits ist aber auch $x_4 = x_2 + \frac{dx_2}{dt}dt$. Hieraus folgt bei Einsetzen der Werte einerseits:

$$x_4 = x + \frac{dx}{dt}dt + \delta x + \delta\left(\frac{dx}{dt}\right)dt,$$

anderseits:

$$x_4 = x + \delta x + \frac{dx}{dt}dt + \frac{d}{dt}(\delta x)\,dt.$$

Wofern die Zeit nicht variiert wird, folgt aber aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für x_4 in der Tat die spätere Gl. 439.

und daher

$$\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}(\delta x) = \tfrac{1}{2}\,\delta\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]. \tag{440}$$

Wir denken uns nun die Gl. 438 mit der Masse des betreffenden Massenpunktes multipliziert, für alle Koordinaten des Systems gebildet und sodann addiert. Die linke Seite der Gleichung ergibt dann, wofern ein Potential existiert, die mit negativem Vorzeichen genommene Variation des Potentials; denn es ist

$$\sum_{h=1}^{h=n}(X_h\delta x_h + Y_h\delta y_h + Z_h\delta z_h) = -\delta V. \tag{441}$$

Andererseits ergibt die Summation des letzten Gliedes der Gl. 438 nach Gl. 440 die Variation der lebendigen Kraft. Es wird also

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{h=1}^{h=n} m_h\left[\frac{dx_h}{dt}\delta x_h + \frac{dy_h}{dt}\delta y_h + \frac{dz_h}{dt}\delta z_h\right]\right\} = \delta(L - V). \tag{442}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung noch mit dt und integrieren wir sodann zwischen einer Anfangs- und einer Endzeit (t_1 und t_2), so verschwindet die linke Seite der Gl. 442, wofern wir die Variation der Bewegung so vornehmen, daß für die Anfangs- und die Endzeit die tatsächliche und die variierte Bahn zusammenfallen. Denn dann verschwinden für diese beiden Zeiten die Variationen der Koordinaten, und unter der gemachten Voraussetzung wird somit

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(L - V)\,dt = 0. \tag{443}$$

Das durch diese Gleichung ausgedrückte Prinzip der kleinsten Wirkung lehrt also, daß das Zeitintegral der Variation des Unterschiedes zwischen lebendiger Kraft und Potential zwischen zwei Zeitgrenzen, für die die Bahnen nicht variiert werden, verschwindet, wofern die Zeit von der Variation nicht berührt wird. Da dieses Prinzip von Hamilton (im Jahre 1834) entdeckt wurde, wird es gewöhnlich auch als Hamiltonsches Prinzip bezeichnet.

Die Gl. 443 kann auch in anderer Form geschrieben werden, indem gemäß einer fundamentalen Regel der Variationsrechnung die Reihenfolge der Integration und der Variation vertauscht wird; dann ergibt sich die Formel

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(L - V)\,dt = 0. \tag{444}$$

In dieser Form besagt die Gleichung, daß das Integral ein Extremum darstellt.

Nach Helmholtz wird die Differenz L—V als kinetisches Potential bezeichnet. Indem man die Gl. 444 noch durch den Unterschied (t_2-t_1) dividiert, kann die Gl. 444 nach Helmholtz auch folgendermaßen ausgesprochen werden: „Unter allen denkbaren Bewegungen, die ein System in einer gegebenen Zeit aus einer gegebenen Anfangslage in eine gegebene Endlage überführen, tritt diejenige Bewegung wirklich ein, für die der Mittelwert des kinetischen Potentials einen Grenzwert darstellt.“

§ 217. Die generalisierten Koordinaten.

Lassen sich für ein System soviele untereinander unabhängige Größen angeben, als die Zahl der Freiheitsgrade des Systems beträgt, derart, daß sich durch sie die 3n orthogonalen Koordinaten des Systems vollständig ausdrücken lassen, so werden jene Größen als die generalisierten Koordinaten des Systems bezeichnet. Aus ihrer Definition folgt, daß sie keineswegs die Dimension von Längen (wie Cartesische Koordinaten) haben müssen; sie können auch Winkel, Flächen oder Volumgrößen usw. sein. Unter den generalisierten Bewegungsgleichungen des Systems versteht man die für die einzelnen generalisierten Koordinaten geltenden zeitlichen Differentialgleichungen.

Sind die generalisierten Koordinaten q_h ($h = 1$ bis s, wenn s die Zahl der Freiheitsgrade ist), so ist eine beliebige der 3n orthogonalen Koordinaten im allgemeinen durch die generalisierten Koordinaten in der Form darstellbar

$$\xi_k = f_k(q_1, q_2 \ldots q_s). \tag{445}$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach der Zeit, wenn wir die Ableitungen der generalisierten Koordinaten nach der Zeit, also die sogenannten generalisierten Geschwindigkeiten, mit $\dot{q}$ bezeichnen,

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \sum_{h=1}^{h=s} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_h} \dot{q}_h \tag{446}$$

und

$$\left(\frac{d\xi_k}{dt}\right)^2 = \sum_{h=1}^{h=s} \sum_{l=1}^{l=s} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_h} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_l} \dot{q}_h \dot{q}_l. \tag{447}$$

Nach den für quadratische Funktionen geltenden Theoremen muß daher die lebendige Kraft vollkommen durch die generalisierten Koordinaten und die generalisierten Geschwindigkeiten bestimmt sein. Es ist demnach

$$\delta L = \sum_{h=1}^{h=s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \delta \dot{q}_h\right). \tag{448}$$

Das Potential ist wiederum nur von den generalisierten Koordinaten abhängig, hingegen von den generalisierten Geschwindigkeiten unabhängig. Es ist demnach

$$\delta V = \sum_{h=1}^{h=s} \frac{\partial V}{\partial q_h} \delta q_h . \tag{449}$$

§ 218. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der zweiten Form.

Wenn wir in die Hamiltonsche, das Prinzip der kleinsten Wirkung ausdrückende Gleichung die generalisierten Koordinaten einführen wollen, so bilden wir zunächst aus den Gl. 448 und 449 die Variation des Unterschiedes von kinetischer und potentieller Energie. Es ist

$$\delta (L - V) = \sum_{h=1}^{h=s} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} \right) \delta q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \delta \dot{q}_h \right\} . \tag{450}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \delta q \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) . \tag{451}$$

Daher wird

$$\delta (L - V) = \sum_{h=1}^{h=s} \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) \right] \delta q_h + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h \right) \right\} . \tag{452}$$

Multiplizieren wir nun diese Gleichung mit dt und integrieren wir im Sinne des Hamiltonschen Prinzips derart zwischen zwei Zeitgrenzen, daß für diese selbst die Variationen der Koordinaten verschwinden, so fällt bei der Integration das letzte Glied weg. Da andererseits die generalisierten Koordinaten und somit auch deren Variationen untereinander völlig unabhängig sind, kann aber das Integral nur dann Null sein, wenn jeder der s eckigen Klammerausdrücke einzeln verschwindet. Derart ergeben sich die generalisierten Bewegungsgleichungen, die sogenannten Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der zweiten Form*), nämlich

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_h} = - \frac{\partial V}{\partial q_h} \quad (h = 1 \text{ bis } s) . \tag{453}$$

Die auf der rechten Seite der Gleichung stehenden negativen partiellen Differentialquotienten des Potentials nach den generalisierten Koordinaten werden auch als generalisierte Kräfte bezeichnet. (Werden nämlich im besonderen die generalisierten

*) Diese Gleichungen wurden von Lagrange natürlich vor Aufstellung des Hamiltonschen Prinzips aufgestellt, das für ihre Ableitung zwar zweckmäßig, aber nicht notwendig ist.

Koordinaten zu den orthogonalen Cartesischen, so treten an die Stelle der generalisierten Kräfte die üblichen Kraftkomponenten.) Da indessen die generalisierten Koordinaten keineswegs die Dimension einer Länge haben müssen, so brauchen auch die generalisierten Kräfte nicht die Dimension g cm sec^{-2} zu haben. Nur das **Produkt** aus einer generalisierten Kraft und der zugehörigen generalisierten Koordinate muß stets von der Dimension einer **Arbeit** (also g cm^2 sec^{-2}) sein. Ist beispielsweise eine generalisierte Koordinate ein Winkel, so ist die zugehörige generalisierte Kraft ein Drehmoment; ist sie eine Volumgröße, so ist die zugehörige generalisierte Kraft von der Dimension eines Druckes, und so fort.

Die partiellen Ableitungen der lebendigen Kraft nach den generalisierten Geschwindigkeiten werden als **generalisierte Impulse** und gewöhnlich mit p_h bezeichnet. Es ist also

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}. \tag{454}$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung die generalisierte Geschwindigkeit durch den zeitlichen Differentialquotienten einer orthogonalen Koordinate, etwa x_h, so ergibt die linke Seite $m_h dx_h/dt$, also die Impulskomponente, woraus sich die Bezeichnung „generalisierter Impuls“ erklärt. Unter Benutzung dieses Begriffes kann die Gl. 453 in der einfacheren Form geschrieben werden

$$\frac{dp_h}{dt} = \frac{\partial(L - V)}{\partial q_h}. \tag{455}$$

Um die Bedeutung der generalisierten Bewegungsgleichungen an einem einfachen Beispiel zu veranschaulichen, fragen wir nach den **Bewegungsgleichungen eines freien Massenpunktes in ebenen Polarkoordinaten**, wofern der Massenpunkt gegen den Ursprung im umgekehrt quadratischen Verhältnis zur Entfernung angezogen wird. Als generalisierte Koordinaten erscheinen dann der von dem Ursprung zu dem Massenpunkt gezogene Radiusvektor von der Länge r und der Winkel φ, den die Richtung des Radiusvektors mit einer festen Richtung einschließt.

Wir zerlegen nun die Geschwindigkeit in zwei zueinander senkrechte Komponenten, eine radiale dr/dt und eine dazu normale in der Richtung des zunehmenden Winkels φ, also $r\,d\varphi/dt$. Daher wird die lebendige Kraft des Massenpunktes

$$L = \tfrac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2]. \tag{456}$$

Hieraus folgt für die beiden generalisierten Impulse, die mit p_r und p_φ bezeichnet werden mögen,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \tag{457}$$

und

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}. \tag{458}$$

Ferner wird

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2, \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \tag{459}$$

Endlich folgt aus

$$V = -m\frac{C}{r}, \tag{460}$$

wobei C eine Konstante bedeute,

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = -m\frac{C}{r^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \tag{461}$$

Setzen wir also die Werte aus den Gleichungen (457) bis (461) in die Gl. 455 ein, so erhalten wir für den betrachteten Sonderfall die Bewegungsgleichungen in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= -\frac{C}{r^2}, \\ r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{462}$$

Als ein weiteres sehr einfaches Beispiel für die Anwendung generalisierter Koordinaten möge das physische Pendel betrachtet werden. Als einzige generalisierte Koordinate erscheint dann der Winkel, den die durch Aufhängepunkt und Schwerpunkt gelegte Gerade mit der Vertikalen einschließt. Dieser Winkel sei ϑ; dann ist, wenn wir das Trägheitsmoment mit J bezeichnen,

$$L = \tfrac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2, \tag{463}$$

und andererseits ist, wenn a der Abstand zwischen Aufhängepunkt und Schwerpunkt ist,

$$V = -mga\cos\vartheta + \text{const.} \tag{464}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = mga\sin\vartheta, \qquad p_\vartheta = J\dot{\vartheta}. \tag{465}$$

Daher ergibt sich die Bewegungsgleichung (vgl. Gl. 181) in der Form

$$J\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -mga\sin\vartheta. \tag{466}$$

§ 219. Die kanonische Form der Bewegungsgleichungen.

Aus der Gl. 447 folgt, daß die lebendige Kraft in der Form dargestellt werden kann

$$2L = \sum_{h=1}^{h=s} \sum_{l=1}^{l=s} c_{hl} \dot{q}_h \dot{q}_l , \tag{467}$$

wobei

$$c_{hl} = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \left[\frac{\partial x_k}{\partial q_h} \frac{\partial x_k}{\partial q_l} + \frac{\partial y_k}{\partial q_h} \frac{\partial y_k}{\partial q_l} + \frac{\partial z_k}{\partial q_h} \frac{\partial z_k}{\partial q_l} \right] \tag{468}$$

ist und die Koeffizienten c_{hl} somit von den generalisierten Geschwindigkeiten unabhängig sind. Daher wird

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{h=1}^{h=s} c_{hl} \dot{q}_h \tag{469}$$

und somit

$$2L = \sum_{l=1}^{l=s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l = \sum_{l=1}^{l=s} p_l \dot{q}_l . \tag{470}$$

Wie diese Gleichung zeigt, erscheint also die lebendige Kraft durch die generalisierten Koordinaten und Impulse vollkommen bestimmt. Andererseits kann sie aber auch, wie die frühere Gl. 448 zeigte, aufgefaßt werden als vollständige Funktion der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten. Wir können sowohl setzen

$$L = F(q_l, \dot{q}_l) \tag{471}$$

als auch

$$L = G(p_l, q_l) . \tag{472}$$

Da p_l gleich ist $\partial F / \partial \dot{q}_l$, ist also einerseits

$$dL = \sum \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_l} d q_l + p_l d \dot{q}_l \right\} , \tag{473}$$

andererseits

$$dL = \sum \left\{ \frac{\partial G}{\partial p_l} d p_l + \frac{\partial G}{\partial q_l} d q_l \right\} . \tag{474}$$

Addieren wir die letzten zwei Gleichungen, so finden wir

$$2\,dL = \sum \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} + \frac{\partial G}{\partial q_l} \right) d q_l + p_l d \dot{q}_l + \frac{\partial G}{\partial p_l} d p_l \right\} . \tag{475}$$

Andererseits folgt aus Gl. 470

$$2\,dL = \sum \{ p_l d \dot{q}_l + \dot{q}_l d p_l \} . \tag{476}$$

Subtrahieren wir also die Gl. 476 von der Gl. 475, so finden wir

$$0 = \sum \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} + \frac{\partial G}{\partial q_l} \right) d q_l + \left(\frac{\partial G}{\partial p_l} - \dot{q}_l \right) d p_l \right\} . \tag{477}$$

Da aber nach dem früher Gesagten die q_l und p_l als voneinander unabhängige Variable anzusehen sind, so kann die Gl. 477 nur dann

erfüllt sein, wenn jeder der beiden Klammerausdrücke für sich verschwindet. So erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} = -\frac{\partial F}{\partial q_i} \tag{478}$$

und

$$\dot{q}_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}. \tag{479}$$

Da in Gl. 455 die lebendige Kraft nun als Funktion der q und q aufgefaßt wurde, also als Funktion F, so kann, wenn wir nunmehr die Funktion G einführen, die Gl. 455 in der Form geschrieben werden

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial(G+V)}{\partial q_i} \quad (i = 1 \text{ bis } s). \tag{480}$$

Andererseits bedeutet aber die Summe (G + V) nichts anderes als die Energie, aufgefaßt als Funktion der q und p. Diese die Energie darstellende Funktion der generalisierten Koordinaten und Impulse wird als die Hamiltonsche Funktion bezeichnet. Nennen wir sie H, so ist also, weil ja das Potential nur von den Koordinaten abhängt,

$$H = G(q,p) + V(q). \tag{481}$$

Daher ist

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial G}{\partial p_i}. \tag{482}$$

Aus den Gleichungen (479) und (480) ergeben sich derart die sogenannten kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{483}$$

§ 220. Die zyklischen Variabeln.

Wenn die Hamiltonsche Funktion als unabhängig von einer unter den Koordinaten angesehen werden darf, wenn also beispielsweise

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \tag{484}$$

gesetzt werden kann, so ergibt sich aus den kanonischen Bewegungsgleichungen sofort ein Integral in der Form

$$p_j = \text{const.} \tag{485}$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen sind daher in dem speziellen Falle vollständig integrierbar, wenn die Hamiltonsche Funktion nur von den Impulsen abhängt. Gilt nämlich die Beziehung

$$H = H(p_1, p_2 \ldots p_s), \tag{486}$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \nu_i, \tag{487}$$

wobei (zufolge Gl. 485) die ν_i für das System charakteristische Konstanten darstellen müssen, so nehmen die kanonischen Bewegungsgleichungen die Form an

$$\dot{q}_i = \nu_i, \qquad \dot{p}_i = 0. \tag{488}$$

Hieraus folgt

$$q_i = \nu_i t + \gamma_i, \qquad p_i = \alpha_i, \tag{489}$$

wobei die α_i und γ_i Integrationskonstanten bedeuten.

Die Koordinaten, von denen die Hamiltonsche Funktion nicht abhängt, werden nach Helmholtz als zyklische Koordinaten bezeichnet. Das Problem der Integration der Bewegungsgleichungen erscheint also gelöst, wenn es gelingt, die benutzten Koordinaten derart in neue zu transformieren, daß diese durchwegs zyklisch sind und somit nach durchgeführter Transformation die Hamiltonsche Funktion nur von den neuen Impulsen abhängt.

§ 221. Die Jacobische Transformation.

Um zu einer Transformation der Variabeln zu gelangen, gegen die die kanonischen Bewegungsgleichungen invariant sind, — eine solche Transformation wird als kanonische Transformation bezeichnet —, gehen wir, indem wir wieder mit L die lebendige Kraft und mit V die potentielle Energie bezeichnen, von der Identität aus

$$L - V = 2L - (L + V) = 2L - H \tag{490}$$

oder gemäß Gl. 470

$$L - V = \sum p_i \dot{q}_i - H. \tag{491}$$

Das Hamiltonsche Prinzip kann somit bei Einführung der Hamiltonschen Funktion in der Form geschrieben werden:

$$\delta \int \left(\sum p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0. \tag{492}$$

Die neuen Veränderlichen, in die die p und q transformiert werden sollen, mögen mit α und β bezeichnet werden, wobei also die β den Koordinaten und die α den Impulsen entsprechen. Sollen bei der Transformation die aus dem Hamiltonschen Prinzip folgenden kanonischen Bewegungsgleichungen ungeändert bleiben, so muß bei Einführung der neuen Variabeln die Gl. 492 in die neue Gleichung übergehen

$$\delta \int \left(\sum \alpha_i \dot{\beta}_i - H' \right) dt = 0, \tag{493}$$

wobei unter H' die Hamiltonsche Funktion der neuen Veränderlichen α und β zu verstehen ist.

In die Gl. 493 wird nun die Gl. 492 dann übergehen, wenn der Unterschied der Klammerausdrücke in beiden Gleichungen den vollständigen zeitlichen Differentialquotienten einer Funktion von s alten und s neuen Variablen darstellt, wobei mit s in üblicher Weise die Zahl der Freiheitsgrade des Systems bezeichnet ist. Denn wenn diese Funktion durch die q und β bestimmt ist, so sind ja die Werte der Funktion an den Grenzen des Integrals festgelegt. Die Bedingung der kanonischen Transformation erscheint also, wenn wir die Zusatzfunktion mit Φ bezeichnen, durch die Gleichung ausgedrückt

$$\sum \alpha_1 \dot{\beta}_1 - H' = \sum p_1 \dot{q}_1 - H - \frac{d\Phi}{dt}. \tag{494}$$

Oft ist es nun zweckmäßig, und so auch für die später zu besprechenden Anwendungen, statt einer Zusatzfunktion der Größen q und β eine solche der Größen q und α einzuführen. Man bestimmt hierzu die zwei willkürlichen Funktionen Ψ und Φ derart, daß sie der Beziehung genugen

$$\Psi(q,\alpha) = \Phi(q,\beta) + \sum \alpha_1 \beta_1. \tag{495}$$

Dann wird

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} + \sum \dot{\alpha}_1 \beta_1 + \sum \alpha_1 \dot{\beta}_1. \tag{496}$$

Setzen wir dies in die Gl. 494 ein, so finden wir somit

$$-\sum \dot{\alpha}_1 \beta_1 - H' = \sum p_1 \dot{q}_1 - H - \frac{d\Psi}{dt}. \tag{497}$$

Aus der Forderung, daß infolge der Transformation beide Seiten dieser Gleichung identisch sein müssen, ergeben sich derart die folgenden Transformationsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial \Psi(q,\alpha)}{\partial q_1} \\ \beta_1 &= \frac{\partial \Psi(q,\alpha)}{\partial \alpha_1} \\ H'(\alpha,\beta) &= H(p,q) + \frac{\partial \Psi(q,\alpha)}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{498}$$

Sind diese Transformationsgleichungen, die zuerst von Jacobi aufgestellt wurden, erfüllt, so gelten demnach die kanonischen Gleichungen auch für die neuen Variabeln; auch für sie ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta_1}{dt} &= \frac{\partial H'(\alpha,\beta)}{\partial \alpha_1} \\ \frac{d\alpha_1}{dt} &= -\frac{\partial H'(\alpha,\beta)}{\partial \beta_1}. \end{aligned}\right\} \tag{499}$$

§ 222. Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung.

Wenn es im besonderen gelingt, die Transformation der alten Variabeln p, q in die neuen α, β gemäß den Gl. 498 derart durchzuführen, daß die neuen Koordinaten zyklisch werden, so ist das Problem der Integration der Bewegungsgleichungen für den betreffenden Fall nach dem in § 220 Gesagten gelöst. Wir können uns daher die Aufgabe stellen, eine Funktion S (q, α) derart zu bestimmen, daß nach Durchführung der Transformationen gemäß den Gleichungen (498), in denen jetzt S statt Ψ zu schreiben ist, die neue Hamiltonsche Funktion nur von den neuen Impulsen abhängt und wir somit setzen konnen

$$H' = E(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_s). \tag{500}$$

Dann lauten die Lösungen der Gleichungen (499) einfach

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} t + \gamma_1 \\ \alpha_1 &= \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{501}$$

Das Problem der Bestimmung der Funktion S ist nun zurückführbar auf das Problem der Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Nach der ersten der Gleichungen (498), in denen wir uns S statt Ψ geschrieben denken, ist nämlich

$$H(q,p) = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right), \tag{502}$$

und da andererseits die Hamiltonsche Funktion der Energie E gleich sein muß, ergibt sich somit die sogenannte Hamilton-Jacobische Differentialgleichung

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E, \tag{503}$$

welche Differentialgleichung unter Umständen die Berechnung der Funktion S gestattet. Die vollständige Lösung muß natürlich ebensoviel Integrationskonstanten enthalten, als die Zahl der Freiheitsgrade beträgt, so daß wir diese Konstanten mit den noch willkürlich gelassenen Größen $\alpha_1 \ldots \alpha_s$ identifizieren können. Andererseits muß von diesen Konstanten natürlich auch die Energie abhängen.

Aus der Konstanz der α (gemäß Gl. 501) folgt

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q_1} d q_1 + \cdots + \frac{\partial S}{\partial q_s} d q_s \tag{504}$$

oder nach der ersten der Gleichungen (498) und integriert

$$S = \int_A^B \sum p_1 d q_1, \tag{505}$$

wobei A und B eine Anfangs- und eine Endposition des Systems bedeuten mögen.

Die letzte Gleichung kann auch in der Form geschrieben werden

$$S = \sum \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i \, dt, \tag{506}$$

wenn t_1 und t_2 die den beiden Positionen entsprechenden Zeiten bedeuten, oder nach Gl. 470, wenn mit L wieder die lebendige Kraft bezeichnet wird,

$$S = 2 \int_{t_1}^{t_2} L \, dt. \tag{507}$$

Die Größe S, die derart in einem engen Zusammenhang mit der kinetischen Energie steht, wird gewöhnlich als die Wirkungsfunktion bezeichnet.

§ 228. Die Wirkungsfunktion bei einem einzigen Freiheitsgrad.

In dem besonderen Fall eines einzigen Freiheitsgrades wird die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung zu einer totalen. In der Lösung der Differentialgleichung tritt dann nur eine einzige Integrationskonstante auf, die wir zweckmäßig mit der Energie selbst zusammenfallen lassen konnen. Die Gleichungen (501) nehmen dann die spezielle Form an

$$\alpha = E, \qquad \beta = t - t_0 \tag{508}$$

(wobei nun ein Nullpunkt der Zeit, t_0, die Stelle der früher mit β bezeichneten Integrationskonstante vertritt).

Während ferner im allgemeinen jeder Impuls eine Funktion aller Koordinaten und der Konstanten sein kann, ist in dem Sonderfall eines einzigen Freiheitsgrades

$$p = p(q, E) \tag{509}$$

und somit nach Gl. 505

$$S = \int_{q_0}^{q_1} p(q, E) \, dq. \tag{510}$$

Nun wird nach Gl. 498 (in der S statt Ψ zu schreiben ist)

$$\beta = \frac{\partial}{\partial E} \int p(q, E) \, dq, \tag{511}$$

und somit wird nach Gl. 508

$$t = \int \frac{\partial p(q, E)}{\partial E} dq + t_0. \tag{512}$$

Die Bedeutung dieser Gleichung möge an dem besonders einfachen Beispiel eines einzelnen Massenpunktes veranschaulicht werden

(in welchem Falle allerdings die Anwendung der Hamilton-Jacobischen Methode überflüssig kompliziert ist). Für einen Massenpunkt von der Masse m und der Geschwindigkeit v ist L gleich $\frac{1}{2} m v^2$ und p gleich m v, also

$$L = \frac{p^2}{2m}, \tag{513}$$

und da die potentielle Energie nur von der Koordinate q abhängt,

$$E = H = \frac{p^2}{2m} + V(q), \tag{514}$$

also

$$p = \sqrt{2m[E - V(q)]}. \tag{515}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial p}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}, \tag{516}$$

also nach Gl. 512 als gesuchte Bewegungsgleichung

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}} + t_0. \tag{517}$$

Für die Wirkungsfunktion folgt aus Gl. 510 und Gl. 515

$$S = \sqrt{2m} \int_{q_0}^{q} \sqrt{E - V(q)}\, dq. \tag{518}$$

Betrachten wir, um ein besonders einfaches Beispiel zu wählen, etwa einen nur in vertikaler Richtung im Schwerefeld der Erde bewegten, als punktförmig anzusehenden Körper, so wird V gleich m g q (wenn mit g in üblicher Weise die Fallbeschleunigung bezeichnet wird). Dann nimmt die Gl. 517 die Form an

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{E - mgq}} + t_0 \tag{519}$$

oder

$$t = t_0 - \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2(E - mgq)}{m}}, \tag{520}$$

wenn wir den Ursprung, also den Nullpunkt der Koordinaten so wählen, daß

$$mgq_0 = E \tag{521}$$

wird.

Setzen wir dies in die Gl. 520 ein und quadrieren wir diese, so finden wir die bekannte Beziehung

$$\frac{g}{2}(t - t_0)^2 = q_0 - q. \tag{522}$$

Mit dem bisher betrachteten Sonderfall eines einzigen Freiheitsgrades ist auch der Spezialfall verwandt, in dem von den s Koordinaten (s — 1) zyklisch sind. Bezeichnen wir die nicht zyklische Koordinate mit q_1, so sind alle Impulse mit Ausnahme von p_1 konstant, und es wird

$$S = \int p_1 (q_1, E, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_s)\, dq_1. \tag{523}$$

p_1 läßt sich aber wieder berechnen, indem man die Energie als Funktion $H(q_1, p_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_s)$ darstellt und die Formel nach p_1 auflöst.

§ 224. Die Separation der Variabeln.

Wenn auch keine allgemeine Methode zur Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung existiert, so erweist sich doch in vielen Fällen der Ansatz als erfolgreich, daß man die Wirkungsfunktion S als Summe von s Funktionen darstellt, deren jene nur von einer unter den s Koordinaten abhängt. Man setzt also hierzu

$$S = \sum_{i=1}^{i=s} S_i, \tag{524}$$

wobei

$$S_i = S_i (q_i, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_s) \tag{525}$$

ist.

Durch diesen Ansatz wird die partielle Differentialgleichung in s totale Differentialgleichungen „separiert", die nach der in § 223 entwickelten Methode zu lösen sind. Als Beispiel für diese sogenannte Methode der Trennung der Variabeln möge das (für die Atommechanik bedeutungsvolle) Beispiel eines anisotropen Oszillators betrachtet werden*). Darunter versteht man einen Massenpunkt, der gegen eine feste Ruhelage mit einer Kraft gezogen wird, deren Komponenten in bezug auf ein geeignet gewähltes Koordinatensystem gleich seien $-a_1 x$, $-a_2 y$, $-a_3 z$, wobei a_1, a_2, a_3 Konstanten seien. Die potentielle Energie ist dann

$$V = \frac{a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2}{2}. \tag{526}$$

Für die lebendige Kraft ergibt sich in Erweiterung der früheren Gl. 513 die Beziehung

$$L = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}. \tag{527}$$

Die die Energie als Funktion der q und p darstellende Hamiltonsche Funktion erhalten wir einfach durch Addition der Gleichungen

---

*) Nach Sommerfeld, „Atombau und Spektrallinien".

(526) und (527), und, indem wir die p_i durch die partiellen Ableitungen der Wirkungsfunktion nach den Koordinaten ersetzen, erhalten wir in dem betrachteten Spezialfall für die Bestimmung der Wirkungsfunktion S die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung in der Form

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_3}\right)^2+m(a_1 q_1^2+a_2 q_2^2+a_3 q_3^2)=2mE \qquad (528)$$

(wobei E wieder die Energie bedeutet).

In dem betrachteten Fall läßt sich also die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung nach den drei Variabeln q_1, q_2, q_3 in drei gewöhnliche Differentialgleichungen „separieren"; diese sind von der Form

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2+m a_i q_i^2=2mA_i \qquad (i=1,2,3), \qquad (529)$$

wobei die drei A_i Integrationskonstanten bedeuten, die jedoch untereinander durch die Beziehung zusammenhängen

$$A_1+A_2+A_3=E. \qquad (530)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$2A_i=b_i^2 a_i, \qquad (531)$$

so folgt aus Gl. 529

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=\sqrt{m a_i}\,\sqrt{b_i^2-q_i^2}. \qquad (532)$$

Weil aber

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i=m\dot{q}_i \qquad (533)$$

ist, finden wir

$$\frac{dq_i}{dt}=C_i\sqrt{b_i^2-q_i^2}, \qquad (534)$$

wobei C_i eine Konstante bedeutet.

Da die Geschwindigkeit nicht imaginär werden kann, erkennen wir aus der letzten Gleichung, daß jede der Koordinaten q_i auf einen Bereich von $-b_i$ bis $+b_i$ beschränkt bleiben muß und ferner, daß sich an den Grenzen des Bereiches der Änderungssinn der Koordinate umkehrt, was aber eben nur an den Grenzen möglich ist.

Die in diesem und den vorangehenden Abschnitten angeführten Beispiele können natürlich nur dazu dienen, den Sinn der Hamilton-Jacobischen Methode darzulegen, nicht aber ihren Nutzen, weil hierzu die betrachteten Beispiele zu einfach sind. Der wahre Nutzen der Methode äußert sich einerseits bei Problemen der Himmelsmechanik, andererseits vor allem in der modernen Quanten-

theorie des Atoms, wovon wohl in einem anderen Bande dieses Werkes eingehender die Rede sein wird*).

§ 225. Der Satz vom Virial.

Zu einer für Systeme von sehr vielen Massenpunkten bedeutungsvollen Beziehung gelangen wir, wenn wir die Bewegungsgleichungen des freien Massenpunktes

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{535}$$

usw. mit den entsprechenden Koordinaten multiplizieren und addieren. Wir finden dann zunächst

$$Xx + Yy + Zz = m\left[x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}\right]. \tag{536}$$

Andererseits ist aber

$$x\frac{d^2x}{dt^2} = x\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(x v_x) - v_x^2 = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x^2}{2}\right) - v_x^2. \tag{537}$$

Nach Clausius bezeichnen wir nun als Virial eines Massensystems den Ausdruck

$$U = -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=n}(X_h x_h + Y_h y_h + Z_h z_h). \tag{538}$$

Wenn wir die Gl. 536 uber sämtliche n Massenpunkte des Systems addieren, so finden wir somit

$$-U = \frac{1}{4}\sum m\frac{d^2}{dt^2}(x^2 + y^2 + z^2) - L, \tag{539}$$

wenn mit L wieder die kinetische Energie bezeichnet ist.

Die Gl. 539 wollen wir schließlich noch mit dt multiplizieren, über eine hinreichend große Zeit T integrieren und durch diese Zeit T dividieren. Die linke Seite der Gleichung ergibt dann den zeitlichen Mittelwert des Virials (der gewöhnlich als Virial schlechthin bezeichnet wird), das letzte Glied den zeitlichen Mittelwert der lebendigen Kraft. Das erste Glied der rechten Seite ergibt hingegen den Ausdruck

$$\frac{1}{T}\sum m\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2), \tag{540}$$

und dieser Ausdruck wird natürlich beliebig klein, wenn T hinreichend groß gewählt wird. So liefert die Gl. 539 den von Clausius

*) Eine besonders klare Darstellung der Hamilton-Jacobischen Theorie findet sich im ersten Kapitel des Buches „Vorlesungen über Atommechanik" von Max Born (Berlin, Springer, 1925).

(1870) aufgestellten Virialsatz, wonach im Mittel die kinetische Energie eines Systems seinem Virial gleich ist.

Als ein besonders einfaches, andererseits aber für die kinetische Gastheorie sehr bedeutungsvolles Beispiel möge das Virial eines Systems gleich beschaffener Massenpunkte berechnet werden, die ein parallelepipedisches Gefäß erfüllen mögen, ohne daß zwischen den Massenpunkten Kräfte wirken; solche sollen vielmehr nur von den Gefäßwänden auf die auftreffenden Massenpunkte ausgeübt werden. Die Kanten des Gefäßes mögen die Längen a, b, c haben, und ein Koordinatensystem werde so gelegt, daß seine Achsen den drei Kanten des Gefäßes parallel seien. Der auf die Flächeneinheit bezogene zeitliche Mittelwert der von den Wänden auf das System ausgeübten Kraft ist dem Druck des Systems (p) entgegengesetzt gleich. Es ist also

$$\sum X_h x_h = -p \cdot b \cdot c (x_2 - x_1), \tag{541}$$

wenn x_1 und x_2 die Abstände der beiden, der y-z-Ebene parallelen Flächen von dieser Ebene sind. Da aber $x_2 - x_1$ gleich a ist, wird, wenn wir das Volumen des Parallelepipeds mit V bezeichnen,

$$\sum X_h x_h = -p \cdot V. \tag{542}$$

Derselbe Wert ergibt sich auch für $\sum Y_h y_h$ und für $\sum Z_h z_h$, und daher wird in dem betrachteten Falle nach Gl. 538

$$U = \tfrac{3}{2} p \cdot V. \tag{543}$$

Bezeichnen wir die Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen Massenpunkte mit N, so ist andererseits die kinetische Energie des Systems

$$L = \tfrac{1}{2} N V m u^2, \tag{544}$$

wenn

$$u^2 = \overline{v^2}, \tag{545}$$

nämlich gleich dem Mittelwert des Quadrates der Geschwindigkeiten der einzelnen Massenpunkte ist.

Das Produkt Nm stellt die Massendichte ϱ dar. Wir können daher die Gl. 544 auch in der Form schreiben

$$L = \frac{\varrho V u^2}{2}. \tag{546}$$

Gemäß dem Virialsatz hängt also das mittlere Geschwindigkeitsquadrat mit dem Druck und der Dichte durch die Beziehung zusammen

$$p = \frac{\varrho u^2}{3}. \tag{547}$$

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Die Grundgleichungen der Mechanik starrer Körper.

§ 226. Bewegungsgröße und Drehimpuls des starren Körpers.

Bezeichnen wir die gesamte Bewegungsgröße eines starren Körpers mit $\mathfrak{G}$ und mit $\sum \mathfrak{K}$ die Resultierende aus allen an dem Körper angreifenden äußeren Kräften, so muß wie für jedes Massensystem so auch für den starren Körper die Beziehung gelten

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \sum \mathfrak{K}. \tag{548}$$

Daß für einen starren Körper auch der Flächensatz gelten muß, folgt daraus, daß die Wirkung der starren Verbindungen zwischen den einzelnen, den Körper zusammensetzenden Massenpunkten durch fingierte Zentralkräfte ersetzt werden kann. Betrachten wir nämlich etwa den h-ten und den i-ten Massenpunkt, so findet die Starrheit ihrer Verbindung ihren mathematischen Ausdruck in der Gleichung

$$(x_i - x_h)^2 + (y_i - y_h)^2 + (z_i - z_h)^2 = r_{hi}^2. \tag{549}$$

Indem wir diese Gleichung variieren, finden wir

$$\left.\begin{aligned} &(x_i - x_h)\,\delta x_i + (y_i - y_h)\,\delta y_i + (z_i - z_h)\,\delta z_i \\ &+ (x_h - x_i)\,\delta x_h + (y_h - y_i)\,\delta y_h + (z_h - z_i)\,\delta z_h = 0. \end{aligned}\right| \tag{550}$$

Diese Gleichung multiplizieren wir nun gemäß der Methode der unbestimmten Multiplikatoren mit einem unbestimmt gelassenen Faktor (λ) und zerlegen dann die linke Seite in zwei Teile. Dadurch ersehen wir unmittelbar, daß die starre Verbindung der beiden Massenpunkte zwei gleich großen, aber entgegengesetzten Zusatzkräften äquivalent ist, von denen die eine in dem h-ten, die andere in dem i-ten Massenpunkt angreift und deren Komponenten gleich sind $\lambda(x_h - x_i)$ usw., bzw. $\lambda(x_i - x_h)$ usw. Die Komponenten dieser Kräfte verhalten sich also wie die Projektionen der Verbindungsstrecke auf die Koordinatenachsen. Es müssen demnach die beiden entgegengesetzten Zusatzkräfte in der Tat die Richtung der Verbindungslinie haben; sie sind Zentralkräfte, was eben zu beweisen war. Infolgedessen gilt auch für den starren Körper die Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \sum [\mathfrak{r}\mathfrak{K}], \tag{551}$$

wenn $\mathfrak{U}$ der gesamte Drehimpuls ist und $\mathfrak{r}$ die von einem Bezugs-

punkt zu dem Angriffspunkt der betreffenden Kraft gerichtete Strecke.

Bezeichnen wir die **Translationsgeschwindigkeit** des starren Körpers mit $\mathfrak{u}$ und die **Winkelgeschwindigkeit** mit $\mathfrak{w}$, so wird nach Gl. 303 die Bewegungsgröße

$$\mathfrak{G} = \sum m\mathfrak{v} = \mathfrak{u}\sum m + [\mathfrak{w} \cdot \sum m\mathfrak{r}] \cdot \tag{552}$$

Andererseits wird der Drehimpuls

$$\mathfrak{U} = \sum m[\mathfrak{r}\mathfrak{v}] = [(\sum m\mathfrak{r}) \cdot \mathfrak{u}] + \sum m[\mathfrak{r}[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]] . \tag{553}$$

Die letzten zwei Gleichungen nehmen eine besonders einfache Form dann an, wenn der **Schwerpunkt als Bezugspunkt** gewählt wird. Da nämlich für ihn (nach Gl. 395) $\sum m\mathfrak{r}$ verschwindet, wird dann einfach

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{u}\sum m \tag{554}$$

und

$$\mathfrak{U} = \sum m[\mathfrak{r}[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]] . \tag{555}$$

§ 227. Das Trägheitsmoment.

Um mit der letzten Gleichung eine zweckmäßige Umformung vorzunehmen, betrachten wir zunächst drei beliebige Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und setzen zur Abkürzung

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{D} . \tag{556}$$

Dann ist nach der Regel für das äußere Vektorprodukt

$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]]_x = A_y D_z - A_z D_y . \tag{557}$$

Andererseits ist wieder

$$\left.\begin{aligned} D_z &= B_x C_y - B_y C_x \\ D_y &= B_z C_x - B_x C_z . \end{aligned}\right\} \tag{558}$$

Setzen wir diese Werte in die Gl. 557 ein und addieren wir noch das Glied $A_x B_x C_x$ hinzu, indem wir es zugleich auch wieder subtrahieren, so finden wir

$$\left.\begin{aligned} [\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]]_x = {} & B_x(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) \\ & - C_x(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) . \end{aligned}\right\} \tag{559}$$

Nach der Formel für das innere Produkt zweier Vektoren ist also

$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B}(\mathfrak{C}\mathfrak{A}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) . \tag{560}$$

Wenden wir diese allgemein gültige Formel auf die Gl. 555 an, so finden wir

$$[\mathfrak{r}[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]] = \mathfrak{w}r^2 - \mathfrak{r}(xw_x + yw_y + zw_z) . \tag{561}$$

Daher wird (weil die Komponenten von $\mathfrak{r}$ gleich x, y, z sind)

$$\left.\begin{aligned} U_x &= w_x \sum m(r^2 - x^2) - w_y \sum mxy - w_z \sum mxz \\ U_y &= -w_x \sum myx + w_y \sum m(r^2 - y^2) - w_z \sum myz \\ U_z &= -w_x \sum mzx - w_y \sum mzy + w_z \sum m(r^2 - z^2). \end{aligned}\right\} \tag{562}$$

Bezeichnen wir andererseits die **Trägheitsmomente** um die x-, y-, z-Achse mit J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, so ist (nach Gl. 160)

$$J_{xx} = \sum m(y^2 + z^2) = \sum m(r^2 - x^2) \tag{563}$$

usw. Ebenso ist nach Gl. 176

$$-\sum mxy = J_{xy}, \tag{564}$$

wenn wir mit J_{xy} das **Deviationsmoment** in bezug auf die x-y-Ebene bezeichnen usw., wobei natürlich

$$J_{yx} = J_{xy} \tag{565}$$

ist.

Die Gleichungen (562) lassen sich also in der Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} U_x &= w_x J_{xx} + w_y J_{xy} + w_z J_{xz} \\ U_y &= w_x J_{yx} + w_y J_{yy} + w_z J_{yz} \\ U_z &= w_x J_{zx} + w_y J_{zy} + w_z J_{zz}. \end{aligned}\right\} \tag{566}$$

Multiplizieren wir nun andererseits die Gl. 561 skalar mit $\mathfrak{w}$, sodann noch mit der Masse und addieren wir schließlich über alle Massenpunkte, so finden wir nach Gl. 555

$$\mathfrak{U}\mathfrak{w} = \sum m\left\{w^2 r^2 - w^2 r^2 \cos^2(\mathfrak{w}, \mathfrak{r})\right\}. \tag{567}$$

Nun ist aber $r \sin(\mathfrak{w}, \mathfrak{r})$ nichts anderes als das Lot, das von dem betreffenden Massenpunkt auf die Rotationsachse gefällt wird, und wenn wir das Trägheitsmoment um die Rotationsachse einfach mit J bezeichnen, wird somit

$$\mathfrak{U}\mathfrak{w} = w^2 J. \tag{568}$$

Folglich wird

$$J = \frac{U_x w_x + U_y w_y + U_z w_z}{w^2}. \tag{569}$$

Bezeichnen wir mit a, b, c die Richtungskosinus des Vektors $\mathfrak{w}$, so daß

$$\frac{w_x}{w} = a, \qquad \frac{w_y}{w} = b, \qquad \frac{w_z}{w} = c \tag{570}$$

ist, so finden wir somit aus den Gleichungen (566) und (569)

$$J = a^2 J_{xx} + b^2 J_{yy} + c^2 J_{zz} + 2ab J_{xy} + 2bc J_{yz} + 2ca J_{zx}. \tag{571}$$

Diese Gleichung zeigt, wie bei gegebenen Werten der Trägheits-

momente um die drei Koordinatenachsen und der Deviationsmomente in bezug auf die drei Koordinatenebenen das Trägheitsmoment um jede beliebige Achse ermittelt werden kann, die mit den Koordinatenachsen gegebene Winkel einschließt.

§ 228. Die graphische Darstellung des Trägheitsmomentes.

Gemäß dem schon in § 151 angegebenen Prinzip denken wir uns von dem Schwerpunkt des starren Körpers auf allen durch den Schwerpunkt gehenden Geraden Strecken von einer Länge

$$l = \frac{1}{\sqrt{J}} \tag{572}$$

aufgetragen. Die Koordinaten des Endpunktes der Strecke mögen mit ξ, η, ζ bezeichnet werden; dann ist

$$a = \frac{\xi}{l}, \qquad b = \frac{\eta}{l}, \qquad c = \frac{\zeta}{l} \tag{573}$$

oder nach Gl. 572

$$a^2 = \xi^2 J, \qquad b^2 = \eta^2 J, \qquad c^2 = \zeta^2 J. \tag{574}$$

Setzen wir diese Werte in die Gl. 571 ein, so finden wir

$$1 = J_{xx}\xi^2 + J_{yy}\eta^2 + J_{zz}\zeta^2 + 2J_{xy}\xi\eta + 2J_{yz}\eta\zeta + 2J_{zx}\zeta\xi. \tag{575}$$

Durch diese Gleichung ist als geometrischer Ort der Endpunkte der Strecken eine Fläche zweiten Grades dargestellt, und zwar ein Ellipsoid, weil ja das Trägheitsmoment weder Null noch unendlich werden kann. Machen wir die Achsen des Ellipsoids zu den Achsen eines Koordinatensystems, so wird die Gleichung der Fläche rein quadratisch, so daß also für ein solches Koordinatensystem die Ausdrücke J_{xy}, J_{yz} und J_{zx} verschwinden.

Bezeichnen wir die Trägheitsmomente um die Achsen eines derartigen Koordinatensystems, also (nach § 151) die Hauptträgheitsmomente mit J_1, J_2, J_3 und die Komponenten des Drehimpulses sowie der Winkelgeschwindigkeit nach den Hauptträgheitsachsen mit U_1, U_2, U_3 bzw. w_1, w_2, w_3, so nehmen die Gleichungen (566) die einfache Form an

$$U_1 = w_1 J_1, \qquad U_2 = w_2 J_2, \qquad U_3 = w_3 J_3. \tag{576}$$

§ 229. Die Berechnung der Deviationsmomente.

Bezeichnen wir bei einer beliebigen Rotation, bei der wir einen bestimmten Massenpunkt ins Auge fassen wollen, mit $\mathfrak{p}$ das vektoriell aufgefaßte Lot, das von dem Massenpunkt auf die Rotationsachse gefällt wird, so hat die Rotation das Auftreten einer Zentrifugalkraft zur Folge, die durch den Ausdruck bestimmt ist

$$\mathfrak{P} = -mw^2\mathfrak{p}. \tag{577}$$

Die in den einzelnen Massenpunkten angreifenden Zentrifugalkräfte lassen sich nun zusammensetzen zu einer resultierenden Einzelkraft, die gleich ist $\sum \mathfrak{P}$ und einem resultierenden Kräftepaar, dessen Moment in bezug auf einen irgendwie gewählten Punkt $\mathfrak{M}$ genannt werde.

Es ist also

$$\sum \mathfrak{P} = - w^2 \sum m\mathfrak{p}, \tag{578}$$

und wenn wir den von dem Bezugspunkt des Momentes aus gezogenen Radiusvektor mit $\mathfrak{r}$ bezeichnen,

$$\mathfrak{M} = - w^2 \sum m[\mathfrak{r}\mathfrak{p}]. \tag{579}$$

Machen wir nun etwa die Rotationsachse zur z-Achse eines Koordinatensystems, so verschwindet p_z, während p_x und p_y gleich $-x$ und $-y$ werden. Die Komponenten des Vektors $\mathfrak{r}$ sind x, y, z. Daher finden wir

$$\sum P_x = w^2 \sum mx, \qquad \sum P_y = w^2 \sum my, \qquad \sum P_z = 0. \tag{580}$$

Die Summenausdrücke dieser Gleichungen verschwinden dann, wenn die **Rotationsachse durch den Schwerpunkt** geht; dann entfällt die Einzelkraft, zu der sich sonst die Zentrifugalkräfte zusammensetzen.

Die drei Komponenten des Vektorproduktes $[\mathfrak{r}\mathfrak{p}]$ ergeben, wenn die Rotationsachse zur z-Achse gemacht wird (also p_z gleich Null wird)

$$\left.\begin{aligned} [\mathfrak{r}\mathfrak{p}]_x &= r_y p_z - r_z p_y = yz \\ [\mathfrak{r}\mathfrak{p}]_y &= r_z p_x - r_x p_z = -zx \\ [\mathfrak{r}\mathfrak{p}]_z &= r_x p_y - r_y p_x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{581}$$

Es wird also

$$M_x = w^2 J_{yz}, \qquad M_y = - w^2 J_{zx}, \qquad M_z = 0. \tag{582}$$

Damit erscheint in der Tat die Angabe in § 154 bewiesen, daß die Größen J_{zx} und J_{yz} nichts anderes sind als die durch w^2 dividierten Komponenten des Kräftepaares, das die um die z-Achse erfolgende Rotation aus der x-y-Ebene **abzulenken** sucht. Das diese Ablenkung, diese „Deviation" bewirkende Kräftepaar verschwindet nur dann, wenn für das benutzte Koordinatensystem die Größen J_{yz} und J_{zx} Null werden, wenn also die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen. Eine um eine Hauptträgheitsachse erfolgende Rotation beharrt auch ohne Einwirkung äußerer Kräfte in ihrer Ebene, so daß also in der Tat die Hauptträgheitsachsen die **freien Achsen** des starren Körpers darstellen.

§ 280. Die Eulerschen Gleichungen.

Die Betrachtung der Bewegung eines starren Körpers läßt eine wesentliche Vereinfachung zu, wenn man die Bewegung auf ein mit dem Körper starr verbundenes Koordinatensystem bezieht, das von den Hauptträgheitsachsen gebildet wird und den Schwerpunkt zum Ursprung hat. Es gilt dann die Gl. 551; es ist also, wenn das gesamte auf den Schwerpunkt bezogene Drehmoment der äußeren Kräfte mit $\mathfrak{M}$ und der Drehimpuls mit $\mathfrak{U}$ bezeichnet werden,

$$\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{U}}{dt} \tag{583}$$

oder nach Gl. 302

$$\mathfrak{M} = \frac{d^*\mathfrak{U}}{dt} + [\mathfrak{w}\mathfrak{U}], \tag{584}$$

wenn $d^*\mathfrak{U}/dt$ der zeitliche Differentialquotient in bezug auf das mit dem Körper starr verbundene und daher mit ihm rotierende Koordinatensystem ist. Andererseits folgt aus Gl. 302, weil das äußere Produkt jedes Vektors mit sich selbst verschwindet,

$$\frac{d^*\mathfrak{w}}{dt} = \frac{d\mathfrak{w}}{dt}. \tag{585}$$

Nach den Gleichungen (576) wird daher

$$\frac{d^*U_1}{dt} = J_1 \frac{dw_1}{dt}, \tag{586}$$

und daher erhalten wir bei Übertragung der Gl. 584 aus der vektoriellen in die analytische Schreibweise die zuerst von Euler im Jahre 1765 aufgestellten und nach ihm benannten Bewegungsgleichungen des starren Körpers in der Form des folgenden Gleichungstripels:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= J_1 \frac{dw_1}{dt} - w_2 w_3 (J_2 - J_3) \\ M_2 &= J_2 \frac{dw_2}{dt} - w_3 w_1 (J_3 - J_1) \\ M_3 &= J_3 \frac{dw_3}{dt} - w_1 w_2 (J_1 - J_2). \end{aligned}\right\} \tag{587}$$

Bei dem Fehlen äußerer Kräfte verschwinden die linken Seiten des Gleichungstripels. Soll dann überdies die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ nach Betrag und Richtung konstant sein, so muß nach den Gleichungen (587) die Beziehung erfüllt sein, daß

$$w_2 w_3 = w_3 w_1 = w_1 w_2 = 0 \tag{588}$$

wird; d. h. es müssen von den drei Komponenten der Winkelge-

schwindigkeit zwei verschwinden. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Rotation um eine der gewählten Koordinatenachsen, also um eine der Hauptträgheitsachsen erfolgt. Nur dann ist ohne Einwirkung äußerer Kräfte eine dauernde gleichmäßige Rotation um eine feste Achse möglich.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Spezielle Probleme der Mechanik starrer Körper.

§ 231. Schwerpunktsberechnungen.

Um den Schwerpunkt linienförmiger Gebilde zu berechnen, denken wir uns etwa das Kurvenelement ds mit einer Masse m′ds belegt. Dann wird, wenn l die Länge der Kurve ist,

$$\sum m = l m' \tag{589}$$

und

$$\sum m x = m' \int x \, dl. \tag{590}$$

Hieraus folgt für die x-Koordinate des Schwerpunktes

$$\xi = \frac{\int x \, dl}{l}. \tag{591}$$

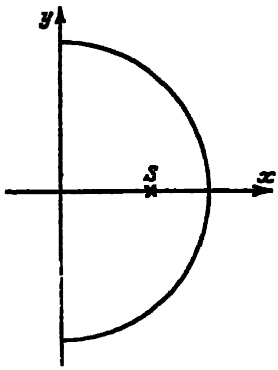


Fig. 231.

Als Beispiel möge etwa eine Halbkreislinie betrachtet werden, die symmetrisch zur x-Achse liege (Fig. 231). Hier wird

$$x = r \cos\vartheta, \qquad l = r\pi, \qquad dl = r\,d\vartheta, \tag{592}$$

also

$$\xi = \frac{\int r^2 \cos\vartheta \, d\vartheta}{r\pi} = \frac{r}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{2r}{\pi}. \tag{593}$$

Für ein flächenhaftes Gebilde erhalten wir in Analogie zu Gl. 591 die Beziehungen

$$\xi = \frac{\int x \, dF}{F}, \qquad \eta = \frac{\int y \, dF}{F}. \tag{594}$$

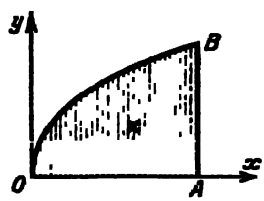


Fig. 232.

Als Beispiel für die Anwendung dieser Formel möge etwa ein Parabelsegment von der in Fig. 232 wiedergegebenen Gestalt betrachtet werden. Auf Grund der Parabelgleichung

$$y^2 = 2px \tag{595}$$

finden wir

$$\int y\,dx = \sqrt{2p}\int\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{2px}. \tag{596}$$

Daher wird für das in Fig. 232 dargestellte Flächenstück OAB der Inhalt

$$F = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x_1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x_1 y_1, \tag{597}$$

wenn x_1 und y_1 die Koordinaten des Punktes B sind.

Andererseits ist

$$\int x\,dF = \int_0^{x_1} xy\,dx = \sqrt{2p}\int_0^{x_1} x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{2p}\,x_1^{\frac{5}{2}}. \tag{598}$$

Indem wir diese Gleichung durch die Gl. 597 dividieren, finden wir

$$\xi = \frac{3}{5}x_1. \tag{599}$$

Der Wert von η ergibt sich auf Grund der Beziehung

$$\int y\,dF = \int_0^{y_1} y\,dy\,(x_1 - x) = \tfrac{1}{2}x_1 y_1^2 - \int_0^{y_1} xy\,dy. \tag{600}$$

Nun ist aber x gleich $y^2/2p$, und daher wird

$$\int y\,dF = \frac{y_1^4}{4p} - \frac{1}{2p}\int y^3\,dy = \frac{y_1^4}{8p}. \tag{601}$$

Andererseits ist (weil eben x gleich ist $y^2/2p$) nach Gl. 597

$$F = \frac{y_1^3}{3p}. \tag{602}$$

Dividieren wir die Gl. 601 durch die Gl. 602, so finden wir somit

$$\eta = \frac{3}{8}y_1. \tag{603}$$

Gehen wir von der Fläche zum Körper über, dessen Volumelement dV sei, so treten an die Stelle der Gleichungen (594) nunmehr folgende drei:

$$\xi = \frac{\int x\,dV}{V}, \qquad \eta = \frac{\int y\,dV}{V}, \qquad \zeta = \frac{\int z\,dV}{V}. \tag{604}$$

Als Beispiel möge etwa der Schwerpunkt einer Halbkugel vom Radius a berechnet werden, deren Basis wir mit der x-y-Ebene und deren Zentrum wir mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen lassen. Es ist dann

$$\int z\,dV = \int z(x^2 + y^2)\pi\,dz = \int z(a^2 - z^2)\pi\,dz. \tag{605}$$

Es wird also

$$\int z\,dV = \left| a^2\pi\frac{z^2}{2} - \pi\frac{z^4}{4}\right|_{z=0}^{z=a} = \frac{a^4\pi}{4}. \tag{606}$$

Da

$$V = \frac{2}{3}a^3\pi \tag{607}$$

ist, wird

$$\zeta = \frac{3}{8}a. \tag{608}$$

In vielen Fällen kann zur Berechnung des Schwerpunktes mit Vorteil ein geometrisches Theorem verwendet werden, das bereits um das Jahr 400 n. Chr. von **Pappus** aufgestellt wurde, das aber gewöhnlich nach dem zweiten Entdecker dieser Beziehung als **Guldinsche Regel** bezeichnet wird. Diese Regel stellt eine Beziehung zwischen dem Inhalt einer **Rotationsfläche** und dem Abstand her, den von der Rotationsachse der **Schwerpunkt der erzeugenden Kurve** hat.

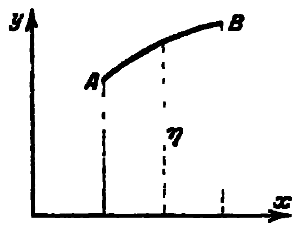


Fig. 233.

Ist AB die erzeugende Kurve von der Länge l und erfolgt die Rotation etwa um die x-Achse, während die Kurve in der x-y-Ebene liegt (Fig. 233), so ist die Oberfläche der erzeugten Rotationsfläche

$$F = 2\pi\int y\,dl \tag{609}$$

oder, wenn η die y-Koordinate des Schwerpunktes der Kurve AB ist,

$$F = 2\pi\eta l. \tag{610}$$

Mittels dieser Beziehung läßt sich z. B. leicht das in Gl. 593 ausgedrückte Resultat ableiten. Rotiert eine halbkreisförmige Linie um den Durchmesser, so entsteht als Rotationsfläche eine Kugelfläche von dem Inhalt $4r^2\pi$. Die Länge der erzeugenden Kurve ist $r\pi$. Werden diese Werte für F und l in die Gl. 610 eingesetzt, so ergibt sich in der Tat für η der Wert $2r/\pi$.

Denken wir uns statt einer Kurve ein Stück der x-y-Ebene vom Inhalt J um die x-Achse rotierend, so entsteht ein Körper, dessen Volumen mit der Koordinate η des Schwerpunkts des rotierenden Flächengebildes durch die Beziehung verknüpft ist

$$V = 2\pi\eta J. \tag{611}$$

Als Beispiel für die Anwendung dieser Beziehung können wir

etwa den Schwerpunkt einer Halbkreisfläche ermitteln (wohl zu unterscheiden von dem Schwerpunkt einer Halbkreislinie). Durch die Umdrehung der Halbkreisfläche um ihren Durchmesser entsteht eine Kugel vom Volumen $\frac{4}{3} r^3 \pi$. Setzen wir dies in die Gl. 611 ein, und für J den Wert $\frac{1}{2} r^2 \pi$, so finden wir

$$\eta = \frac{4r}{3\pi}. \tag{612}$$

§ 232. Die Berechnung von Trägheitsmomenten.

Als erstes Beispiel für die Berechnung eines **Trägheitsmomentes** werde ein **rechtwinkliges Parallelepiped** mit den Kantenlängen a, b, c betrachtet; ϱ sei die Massendichte des homogenen Körpers. Ein Koordinatensystem werde so gelegt, daß sein Ursprung mit dem Schwerpunkt zusammenfalle und seine Achsen den drei Kanten parallel seien. Wir finden dann z. B. für das Trägheitsmoment um die x-Achse

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum m(y^2+z^2) = \varrho \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \\ &= \varrho\, a \left(\int y^2 dy \int dz + \int z^2 dz \int dy\right) = \varrho\, a \frac{b^3c + c^3b}{12} \end{aligned} \tag{613}$$

oder endlich, da ja a b c das Volumen und das Produkt aus diesem und ϱ die Gesamtmasse m darstellt, in Übereinstimmung mit Gl. 168:

$$\left.\begin{aligned} J_{xx} &= m\frac{b^2+c^2}{12} \\ J_{yy} &= m\frac{c^2+a^2}{12} \\ J_{zz} &= m\frac{a^2+b^2}{12}. \end{aligned}\right\} \tag{614}$$

Als zweites Beispiel möge ein **Kreiszylinder** betrachtet werden und zunächst sein **Trägheitsmoment um seine Achse** ermittelt werden. Die Höhe des Zylinders sei h, der Radius der Basis sei a; die Massendichte sei wieder ϱ. Wir betrachten zunächst zwei koaxiale Zylinderflächen von den Radien r und r + dr; das von diesen begrenzte Volumen ist $2 r\pi h\, dr$, und dessen Masse somit $2\pi\varrho\, r h\, dr$. Multiplizieren wir mit r^2 und integrieren wir dann von r = 0 bis r = a, so finden wir

$$J = 2\pi\varrho h \int_0^a r^3 dr = 2\pi\varrho h \frac{a^4}{4}, \tag{615}$$

oder da die Gesamtmasse

$$m = a^2 \pi h \varrho \tag{616}$$

ist,

$$J = \tfrac{1}{2} m a^2. \tag{617}$$

Um auch das Trägheitsmoment eines Zylinders um eine durch den Schwerpunkt gehende und zu der eigentlichen Achse **senkrechte Achse** zu finden, berechnen wir zunächst das Trägheitsmoment einer **Kreisscheibe** von der sehr kleinen Höhe c um einen Durchmesser der Scheibe. Indem wir Polarkoordinaten r und φ einführen, wird ein Volumelement

$$dV = c\, r\, dr\, d\varphi. \tag{618}$$

Der Abstand dieses Elementes von dem Durchmesser ist $r \sin \varphi$, und daher wird der Anteil dieses Volumelementes an dem Trägheitsmoment $\varrho c r^3 \sin^2 \varphi\, dr\, d\varphi$. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment der Kreisscheibe um den Durchmesser mit J'', so wird also

$$J'' = \varrho c \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi\, d\varphi. \tag{619}$$

Nun ist aber nach einer bekannten Formel

$$\int \sin^2 \varphi\, d\varphi = -\frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{\varphi}{2}, \tag{620}$$

und daher wird

$$J'' = \varrho c \frac{a^4}{4} \pi \tag{621}$$

oder, wenn wir die Masse der Scheibe mit m'' bezeichnen,

$$J'' = \frac{m a^2}{4}. \tag{622}$$

Gehen wir nun von der Scheibe zu dem Zylinder über, dessen Trägheitsmoment senkrecht zur eigentlichen Achse berechnet werden soll, so sei dJ' der Anteil, den zu dem Trägheitsmoment J' eine Scheibe beitrage, die von z bis z + dz reiche, wenn wir die Zylinderachse zur z-Achse machen und den Schwerpunkt zum Ursprung des Koordinatensystems. Es ist dann nach dem **Steinerschen Satz**

$$dJ' = dm \frac{a^2}{4} + dm \cdot z^2, \tag{623}$$

wobei

$$dm = \varrho a^2 \pi\, dz \tag{624}$$

ist. Daher ist

$$J' = m \frac{a^2}{4} + \varrho a^2 \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz, \tag{625}$$

also

$$J' = m\frac{a^2}{4} + \varrho\frac{a^2\pi h^3}{12} \tag{626}$$

oder

$$J' = m\left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \tag{627}$$

(vgl. Gl. 172).

Um das **Trägheitsmoment** einer **Kugel** um eine durch den Mittelpunkt gehende Achse zu berechnen, betrachten wir zunächst eine Kugelschale, die von zwei konzentrischen Kugelflächen mit den Radien r und r + dr begrenzt werde. Das Trägheitsmoment der Kugelschale werde J' genannt; dann ist wegen der allseitigen Symmetrie

$$J' = \sum m(y^2 + z^2) = \sum m(z^2 + x^2) = \sum m(x^2 + y^2). \tag{628}$$

Da aber

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{629}$$

ist, so wird

$$3J' = 2\sum m r^2 = 2r^2 m', \tag{630}$$

wenn

$$m' = 4r^2\varrho\pi dr \tag{631}$$

die Masse der Kugelschale ist. Hieraus folgt für das Trägheitsmoment der ganzen Kugel, deren Radius a und deren Masse m seien,

$$J = \frac{8}{3}\varrho\pi\int_0^a r^4 dr = \frac{8}{3}\varrho\pi\frac{a^5}{5} \tag{632}$$

oder, da

$$m = \frac{4}{3}a^3\pi\varrho \tag{633}$$

ist,

$$J = \frac{2}{5}a^2 m \tag{634}$$

(vgl. Gl. 173).

§ 233. Die Eulerschen Winkel.

Den Eulerschen Bewegungsgleichungen des starren Körpers liegt die Benutzung eines selbst bewegten Koordinatensystems zugrunde, das mit dem starren Körper fest verbunden ist. Um nun die Bewegung des starren Körpers näher beschreiben zu können, ist es notwendig, die jeweilige Lage des bewegten Koordinatensystems in bezug auf ein im Raume festes angeben zu können. Dies geschieht, wie zuerst Euler zeigte, am einfachsten durch die Angabe **dreier Winkel**, die man die **Eulerschen Winkel** nennt.

Das im Raume feste Koordinatensystem werde als das x-y-z-System bezeichnet, das mit dem Körper starr verbundene als das ξ-η-ζ-System. Beide Systeme mögen denselben Ursprung haben. Die x-y- und ξ-η-Ebene schneiden einander in einer Linie, die als die **Knotenlinie** bezeichnet wird und die natürlich sowohl auf der z-Achse als auch auf der ζ-Achse senkrecht steht (Fig. 234). Die positive Richtung der Knotenlinie sei dabei durch die Forderung festgelegt, daß, von ihrer Spitze aus gesehen, die Drehung, die auf kürzestem Wege die z-Achse in die ζ-Achse überführt, dem Uhrzeiger entgegengesetzt erscheint. Wir bezeichnen nun mit φ den Winkel von der x-Achse zur Knotenlinie, mit ψ den Winkel von der Knotenlinie zur ξ-Achse und mit ϑ den Winkel von der z-Achse zur ζ-Achse.

Die Bedeutung dieser drei **Eulerschen** Winkel erkennen wir, indem wir jeweils die zwei anderen Winkel als konstant ansehen. Sind φ und ϑ konstant und ändert sich nur der Winkel ψ, so wird dadurch eine Drehung des Körpers um die mit ihm starr verbundene ζ-Achse dargestellt; der Winkel ψ wird darum der **Eigendrehungswinkel** genannt. Sind ψ und ϑ konstant und ändert sich nur der Winkel φ, so beschreibt, während sich die Knotenlinie in der x-y-Ebene dreht, die ζ-Achse um die im Raume feste z-Achse die **Mantelfläche eines Kegels**. Eine derartige Bewegung wird, wenn die Achse eine freie Rotationsachse ist, als **Präzession** bezeichnet, und darum wird der Winkel φ der **Präzessionswinkel** genannt. Sind endlich φ und ψ konstant und ändert sich nur der Winkel ϑ, so ändern dabei lediglich die ζ-Achse und infolgedessen die ξ-η-Ebene ihre Lage im Raum; eine derartige Lagenänderung einer freien Rotationsachse wird als **Nutation** oder **Pendelung** bezeichnet und darum der Winkel ϑ auch der **Nutationswinkel** genannt.

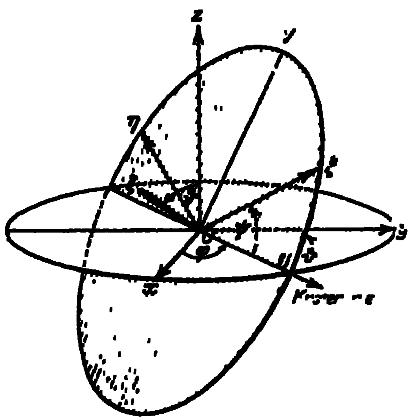


Fig. 234.

Wir betrachten nun die (in Fig. 234 schraffierte) ξ-η-Ebene und konstruieren in ihr außer der ξ- und η-Achse und der Knotenlinie OU überdies noch eine zu dieser normale Achse OV. Eine ganz beliebige elementare Drehung, die in einem Zeitelement dt der Körper

ausführt, kann aber stets in drei Drehungen um drei zueinander senkrechte Achsen zerlegt werden. Als solche wählen wir die Achsen OU, OV und die ζ-Achse. Die Winkelgeschwindigkeiten um diese drei Achsen mögen mit u, v, w bezeichnet werden. Wir fragen nun danach, welche Änderungen durch jene elementare, derart in drei Partialdrehungen auflösbare Drehung die drei Eulerschen Winkel erfahren.

Sehr einfach liegen die Verhältnisse bei den Drehungen um die ζ-Achse und um die Knotenlinie. Bei der Drehung um die ζ-Achse bleiben die Winkel φ und ϑ ungeändert, und es ändert sich nur der Eigendrehungswinkel ψ um den Betrag $+ w\,dt$. Bei der Drehung um die Knotenlinie bleiben wiederum die Winkel ungeändert, die die Lage der Knotenlinie im Raume bestimmen, nämlich die Winkel φ und ψ; es ändert sich nur der Winkel ϑ, und zwar in positivem Sinne um den Betrag $u\,dt$ (denn von der Spitze der Knotenlinie erscheint ja eine Zunahme von ϑ als eine dem Uhrzeiger entgegengesetzte Drehung).

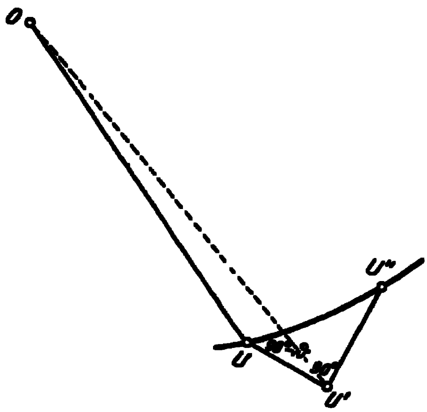


Fig. 235.

Komplizierter ist die Drehung um die Achse OV. Wir konstruieren in der ξ-η-Ebene einen Kreis mit der Längeneinheit als Halbmesser; er schneide, wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen, die Knotenlinie und die dazu senkrechte Achse in den Punkten U und V. Wenn sich nun um die Achse OV die (in Fig. 234 schraffierte) ξ-η-Ebene dreht, so wird nach dem Zeitelement dt der Punkt U an die Stelle U′ gelangt sein. Die neue Knotenlinie sei jetzt OU″. Bei Vernachlässigung von Größen, die klein von der zweiten Ordnung sind, kann das Dreieck UU′U″ als eben angesehen werden (Fig. 235). Es hat bei U′ einen rechten Winkel. Der Winkel bei U ist ebenso groß wie derjenige, den die ξ-η-Ebene mit der z-Achse einschließt, also gleich $90° - \vartheta$; der Winkel bei U″ ist also gleich ϑ, und demnach gelten die Beziehungen

$$UU'' = \frac{UU'}{\sin\vartheta}; \qquad U'U'' = \frac{UU'}{\operatorname{tg}\vartheta}. \tag{635}$$

Nun ist aber UU′ gleich $v \cdot dt$, und andererseits stellt UU″ die Vermehrung des Winkels φ, U′U″ die Verminderung des Winkels ψ dar, soweit diese beiden Winkeländerungen durch die Partialdrehung

um die Achse OV bewirkt werden. Die Änderungen, die durch diese Partialdrehung die beiden Winkel erfahren, sind also bei φ gleich $\mathrm{v\,dt}/\sin\vartheta$, und bei ψ gleich $-\mathrm{v\,dt}/\mathrm{tg}\,\vartheta$.

Es wurde nun bereits früher abgeleitet, daß durch die Drehung um die Knotenlinie der Winkel ϑ, hingegen durch die Drehung um die ζ-Achse der Winkel ψ geändert wird. Für die gesamten Änderungen, die durch eine elementare Drehung die drei Eulerschen Winkel erfahren, gelten also die Beziehungen

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{v}{\sin\vartheta},\qquad \frac{d\psi}{dt}=w-\frac{v}{\mathrm{tg}\,\vartheta},\qquad \frac{d\vartheta}{dt}=u. \tag{636}$$

Indem wir diese Gleichungen nach u, v, w auflösen, erhalten wir die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{d\vartheta}{dt}\\ v&=\frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta\\ w&=\frac{d\psi}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{637}$$

§ 234. Die Bewegungsgleichungen des schweren symmetrischen Kreisels.

Die zuletzt abgeleiteten Beziehungen konnen dazu dienen, um aus den Eulerschen Bewegungsgleichungen des starren Körpers die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten der Kreiselbewegung abzuleiten. Doch möge im folgenden nur ein symmetrischer Kreisel betrachtet werden, der sich rasch um seine Symmetrieachse drehe und auf den keine anderen äußeren Kräfte als seine eigene Schwere wirken. In der Symmetrieachse ist natürlich auch der Schwerpunkt des Kreisels enthalten, und ohne weiteres ist es auch klar, daß die Symmetrieachse eine Hauptträgheitsachse darstellt, während die beiden anderen Hauptträgheitsachsen beliebig in einer senkrecht zu der Symmetrieachse gelegten Ebene errichtet werden können und zwei untereinander gleiche Hauptträgheitsmomente ergeben.

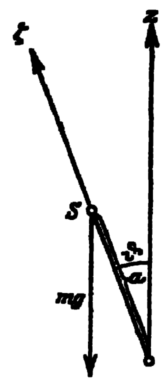


Fig. 236.

Der Unterstützungspunkt des Kreisels werde als Koordinatenursprung, die durch den Ursprung gehende Vertikale als z-Achse, und die Symmetrieachse als ζ-Achse gewählt. An dem Kreisel greift nur die Schwerkraft an, und zwar im Schwerpunkt S (Fig. 236). Da in der von der z-Achse und der ζ-Achse

gebildeten Ebene der Unterstützungspunkt, der Schwerpunkt und die Richtung der Schwerkraft enthalten sind, so muß der Vektor $\mathfrak{M}$ des Drehmoments sowohl auf der z-Achse als auch auf der ζ-Achse senkrecht stehen (denn $\mathfrak{M}$ ist das Drehmoment der Schwerkraft in bezug auf den Unterstützungspunkt). Es muß also

$$M_z = M_\zeta = 0 \tag{638}$$

sein. Hieraus ergeben sich sogleich **zwei Integrale der Bewegungsgleichungen des Kreisels.** Da nämlich der Vektor $\mathfrak{M}$ gleich ist $d\mathfrak{U}/dt$ (vgl. Gl. 551), so muß wegen des Verschwindens von M_z

$$U_z = \text{const.} \tag{639}$$

sein.

Andererseits ist, wenn wir die Symmetrieachse etwa zu der dritten Hauptträgheitsachse machen,

$$J_2 = J_1. \tag{640}$$

M_3 wird gleich M_ζ, verschwindet also gemäß Gl. 638, und aus der dritten der **Eulerschen** Bewegungsgleichungen (Gl. 587) folgt somit, daß dann auch dw_3/dt Null wird, also

$$w_3 = \text{const.} \tag{641}$$

ist, womit ein zweites Integral gewonnen ist.

Ein drittes Integral liefert in dem von uns betrachteten Spezialfall der Satz von der Erhaltung der Energie, also von der Konstanz der Summe aus lebendiger Kraft und potentieller Energie. Nun folgt für die lebendige Kraft L, die ja gleich ist dem halben Produkt aus dem Trägheitsmoment um die Drehachse und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, wofern wir die Regel für das innere Produkt anwenden, aus Gl. 568 die Beziehung

$$2L = U_1 w_1 + U_2 w_2 + U_3 w_3 \tag{642}$$

oder nach Gl. 576

$$2L = w_1^2 J_1 + w_2^2 J_2 + w_3^2 J_3. \tag{643}$$

Wir wollen nun etwa das Trägheitsmoment um die Symmetrieachse mit C und die beiden anderen, untereinander gleichen Hauptträgheitsmomente mit A bezeichnen. Dann wird also

$$2L = A(w_1^2 + w_2^2) + Cw_3^2. \tag{644}$$

Da an dem Kreisel die Kraft mg angreift (wenn m die Masse des Kreisels ist) und zwar in dem Schwerpunkte, dessen Koordinate z sei, so ist die potentielle Energie

$$V = mgz. \tag{645}$$

Auf Grund der Gleichungen 641, 644 und 645 ergibt also das

Energieprinzip als drittes Integral der Bewegungsgleichungen des Kreisels die Beziehung

$$A(w_1^2 + w_2^2) + 2mgz = \text{const}. \tag{646}$$

Unsere weitere Aufgabe besteht nun darin, in den Gleichungen, die die drei Integrale darstellen, also in den Gleichungen 639, 641 und 646 die Veränderlichen durch die **Eulerschen** Winkel zu ersetzen. Wir setzen zur Abkürzung

$$\cos(z, \xi) = \gamma_1, \qquad \cos(z, \eta) = \gamma_2, \qquad \cos(z, \zeta) = \gamma_3. \tag{647}$$

Dann ist

$$\cos(\mathfrak{U}, z) = \cos(\mathfrak{U}, \xi)\gamma_1 + \cos(\mathfrak{U}, \eta)\gamma_2 + \cos(\mathfrak{U}, \zeta)\gamma_3 \tag{648}$$

oder, wenn wir mit dem Betrage des Vektors $\mathfrak{U}$ multiplizieren und beachten, daß die ξ-, η- und ζ-Achse mit den drei Hauptträgheitsachsen zusammenfallen,

$$U_z = U_1\gamma_1 + U_2\gamma_2 + U_3\gamma_3. \tag{649}$$

Nun ist aber, wie schon erwähnt, U_1 gleich $J_1 w_1$ usw. Bezeichnen wir also wieder die Hauptträgheitsmomente des Kreisels mit A, A, C, so wird

$$U_z = A(w_1\gamma_1 + w_2\gamma_2) + Cw_3\gamma_3. \tag{650}$$

Was die drei Richtungskosinus γ_1, γ_2, γ_3 betrifft, so erkennt man zunächst ohne weiteres, daß

$$\gamma_3 = \cos\vartheta \tag{651}$$

ist. Um auch den Klammerausdruck der Gl. 650 durch die **Eulerschen** Winkel ausdrücken zu können, fragen wir nach der **Gleichung der Knotenlinie**. Da diese sowohl der x-y- als auch der ξ-η-Ebene angehört, so ist für sie

$$z = \zeta = 0. \tag{652}$$

Andererseits ist (in Analogie zu Gl. 648)

$$z = \xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta\gamma_3, \tag{653}$$

und somit lautet die Gleichung der Knotenlinie (wegen Gl. 652)

$$-\frac{\eta}{\xi} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \tag{654}$$

Nun schließt die Knotenlinie mit der ξ-Achse den Winkel ψ ein, der in der Richtung von der ξ-Achse zur Knotenlinie negativ zu rechnen ist, und daher ist für einen Punkt der Knotenlinie

$$-\eta = \xi \operatorname{tg}\psi, \tag{655}$$

und somit

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \operatorname{tg}\psi. \tag{656}$$

Hieraus folgt

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2}} \tag{657}$$

und

$$\sin\psi = \cos\psi\cdot\frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \tag{658}$$

Da die Summe der Quadrate von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ Eins ergeben muß, ist aber nach Gl. 651

$$\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2} = \sin\vartheta. \tag{659}$$

Daher wird

$$\cos\psi = \frac{\gamma_2}{\sin\vartheta}, \qquad \sin\psi = \frac{\gamma_1}{\sin\vartheta}; \tag{660}$$

hieraus folgt

$$w_1\gamma_1 + w_2\gamma_2 = \sin\vartheta\,(w_1\sin\psi + w_2\cos\psi). \tag{661}$$

Der Klammerausdruck dieser Gleichung bedeutet aber, wie ohne weiteres aus der früheren Fig. 234 folgt, nichts anderes als die früher mit v bezeichnete Winkelgeschwindigkeit um die Achse OV. Nach der zweiten der Gleichungen (637) wird also

$$w_1\gamma_1 + w_2\gamma_2 = \dot\varphi\sin^2\vartheta. \tag{662}$$

Diesen Ausdruck setzen wir nun in die Gl. 650 ein; in dieser haben wir ferner w_3 durch die Winkelgeschwindigkeit w um die Symmetrieachse (die ζ-Achse) zu ersetzen, so daß wir (bei Benutzung der Gl. 651 und der Gl. 639) als Ausdruck des ersten Integrals die Beziehung erhalten:

$$A\dot\varphi\sin^2\vartheta + C w\cos\vartheta = \text{const}. \tag{663}$$

Das zweite Integral der Bewegungsgleichungen des Kreisels (Gl. 641) nimmt in Eulerschen Koordinaten gemäß der letzten der Gleichungen (637) die Form an

$$\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta = \text{const}. \tag{664}$$

Um schließlich auch die das dritte Integral darstellende Gl. 646 in den Eulerschen Veränderlichen auszudrücken, beachten wir zunächst, daß ganz allgemein

$$u^2 + v^2 + w^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \tag{665}$$

sein muß; denn sowohl die rechte als auch die linke Seite dieser Gleichung stellt das Quadrat des Betrages der tatsächlichen Winkelgeschwindigkeit dar, die eben auf zwei verschiedene Arten in Komponenten zerlegt wird. Da wir das mit dem rotierenden Körper starr verbundene Koordinatensystem so legten, daß die Symmetrie-

achse zur ζ-Achse, also w gleich w_3 wurde, wird nach den Gleichungen (637)

$$w_1^2 + w_2^2 = \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta . \tag{666}$$

Endlich bezeichnen wir noch mit a den Abstand des Schwerpunktes des Kreisels vom Unterstützungspunkt, so daß

$$z = a \cos \vartheta \tag{667}$$

ist (vgl. Fig. 236). — Dann nimmt die Gl. 646 die Form an

$$A(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + 2mga \cos \vartheta = \text{const.} \tag{668}$$

Es handelt sich nun schließlich noch darum, in den drei, die Integrale der Bewegungsgleichungen in Eulerschen Koordinaten darstellenden Gleichungen (663), (664) und (668) die Konstanten zu ermitteln. Wir wollen annehmen, daß am Anfang, also zur Zeit t = 0, der Kreisel nur um seine Symmetrieachse mit der (nach Gl. 641 konstanten) Winkelgeschwindigkeit w rotiere, und daß am Anfang die Symmetrieachse mit der Vertikalen einen Winkel ϑ_0 einschließe. Es ist also für

$$t = 0 \quad \dot{\varphi} = \dot{\vartheta} = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 . \tag{669}$$

Da die linken Seiten der Gleichungen (663), (664) und (668) zu jeder beliebigen Zeit denselben Wert haben müssen wie zur Zeit t = 0, ergeben sich somit die drei Gleichungen:

$$A \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta = C w (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta), \tag{670}$$

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta = w, \tag{671}$$

$$A(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) = 2mga (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta). \tag{672}$$

§ 235. Die Nutation.

Aus den Bewegungsgleichungen des schweren symmetrischen Kreisels können wir zunächst eine weitere ableiten, die nur den **Nutationswinkel** ϑ und seinen zeitlichen Differentialquotienten enthält. Indem wir nämlich die Gl. 670 nach $\dot{\varphi}$ auflösen und den so erhaltenen Wert in die Gl. 672 einsetzen, finden wir

$$A\left[\dot{\vartheta}^2 + \frac{C^2 w^2 (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)^2}{A^2 \sin^2 \vartheta}\right] = 2mga (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \tag{673}$$

oder

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta}{A}\left[2mga - \frac{C^2 w^2 (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)}{A \sin^2 \vartheta}\right]. \tag{674}$$

Diese Gleichung möge für den speziellen Fall **diskutiert** werden, daß die konstante **Winkelgeschwindigkeit** um die Symmetrieachse so **groß** sei, daß

$$w^2 \gg \frac{mgaA}{C^2} \tag{675}$$

ist. Wir setzen nun zur Abkürzung

$$\vartheta - \vartheta_0 = \vartheta'; \tag{676}$$

dabei ist nach Gl. 672 ϑ' stets positiv, weil ja die linke Seite der Gl. 672 positiv sein muß und daher stets ϑ_0 kleiner als ϑ ist. Infolgedessen muß, da die linke Seite der Gl. 674 unbedingt positiv ist, auch der Klammerausdruck in Gl. 674 positiv sein. Es ist also

$$\frac{C^2 w^2 (\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)}{A \sin^2\vartheta} < 2mga: \tag{677}$$

hieraus folgt in Verbindung mit der Ungleichung (676)

$$\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta \lessdot 1, \tag{678}$$

und somit auch

$$\vartheta' \lessdot 1. \tag{679}$$

Nun ist aber nach einer bekannten goniometrischen Beziehung

$$\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta = 2\sin\frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta_0 - \vartheta}{2} \tag{680}$$

oder nach den Formeln (676) und (679)

$$\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta = \vartheta' \sin\vartheta_0 \tag{681}$$

Setzen wir dies in die Gl. 674 ein, so finden wir (da wir nach Formel 679 sin ϑ durch sin ϑ_0 ersetzen können)

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{\vartheta' \sin\vartheta_0}{A}\left(2mga - \frac{C^2 w^2 \vartheta'}{A \sin\vartheta_0}\right). \tag{682}$$

Wegen der Konstanz von ϑ_0 ist aber nach Gl. 676

$$\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta'}{dt}. \tag{683}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{2mga \sin\vartheta_0}{A} = D \tag{684}$$

und

$$\frac{C^2 w^2}{A^2} = E, \tag{685}$$

wobei also D und E als Konstanten anzusehen sind, so wird daher

$$\frac{d\vartheta'}{dt} = \sqrt{D\vartheta' - E\vartheta'^2}, \tag{686}$$

also

$$t = \frac{1}{\sqrt{E}} \int \frac{d\vartheta'}{\sqrt{\frac{D}{E}\vartheta' - \vartheta'^2}}. \tag{687}$$

Nun ist aber nach einer bekannten Formel der Integralrechnung für eine beliebige Variable

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \arcsin\left(\frac{2x}{a} - 1\right). \tag{688}$$

Es wird also

$$t = \frac{1}{\sqrt{E}} \arcsin\left(\frac{2E}{D}\vartheta' - 1\right). \tag{689}$$

Setzen wir für D und E die Werte aus den Gleichungen (684) und (685) ein, so finden wir somit

$$t = \frac{A}{Cw} \arcsin\left(\frac{C^2 w^2 \vartheta'}{mgaA \sin\vartheta_0} - 1\right) + \text{const.} \tag{690}$$

Da für $t = 0$ auch ϑ' verschwinden muß, können wir die additive Integrationskonstante beseitigen, indem wir statt der Funktion $\arcsin(-z)$ die von ihr nur um eine additive Konstante verschiedene Funktion $\arccos z$ einführen. Es wird also

$$1 - \frac{C^2 w^2 \vartheta'}{mgaA \sin\vartheta_0} = \cos\left(\frac{Cwt}{A}\right). \tag{691}$$

Wir benutzen nun die bekannte goniometrische Identität

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{692}$$

und finden so

$$\vartheta' = \frac{2mgaA \sin\vartheta_0}{C^2 w^2} \sin^2\left(\frac{Cwt}{2A}\right). \tag{693}$$

Da der Neigungswinkel der Kreiselachse gleich ist $\vartheta_0 + \vartheta'$, so erkennen wir aus Gl. 693, daß dieser Neigungswinkel periodisch zwischen seinem ursprünglichen Werte und einem bei rascher Rotation nur etwas größerem schwankt. Die Periode der Schwankung wächst mit der Umdrehungsgeschwindigkeit und hängt im übrigen von den beiden Hauptträgheitsmomenten des Kreisels ab. Die Größe der Schwankung erweist sich wiederum umgekehrt proportional dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit.

§ 236. Die Präzession.

Der Präzessionswinkel kann als Funktion der Zeit aus der Gl. 670 berechnet werden. Nach dieser Gleichung (und Gl. 681) ist nämlich

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Cw\vartheta' \sin\vartheta_0}{A \sin^2\vartheta}; \tag{694}$$

oder nach Gl. 693, woferne wir wieder $\sin\vartheta$ durch $\sin\vartheta_0$ ersetzen,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2mga}{Cw} \sin^2\left(\frac{Cwt}{2A}\right). \tag{695}$$

Zur Integration dieser Gleichung benutzen wir die bekannte Formel

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{x}{2}. \tag{696}$$

Es wird somit

$$\varphi = \frac{2mga}{Cw} \frac{2A}{Cw} \left[-\frac{1}{4} \sin\left(\frac{Cwt}{A}\right) + \frac{Cwt}{4A} \right] + \varphi_0 \tag{697}$$

oder

$$\varphi = \frac{mga}{Cw} \left[t - \frac{A}{Cw} \sin\left(\frac{Cwt}{A}\right) \right] + \varphi_0. \tag{698}$$

Die durch die Kreiselachse gelegte Vertikalebene dreht sich also standig, und zwar ist, wie Gl. 695 zeigt, die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung wiederum eine periodische Funktion der Zeit. Die Periode ist um so größer, je rascher die Umdrehung des Kreisels erfolgt, und hängt im übrigen von den beiden Hauptträgheitsmomenten des Kreisels ab. Je rascher der Kreisel rotiert, um so langsamer erfolgt übrigens nach Gl. 695 die Präzession des Kreisels.

Zusammenstellung neuerer Literatur über einige wichtige Probleme der experimentellen Mechanik fester Körper.

(Bearbeitet gemeinsam mit **Franz Urbach**, Wien.)

I. Allgemeine Gravitation.

1. **Burton, C. V.:** The Possible Dependance of Gravitational Attraction on Chemical Composition. Phil. Mag. (6) 28, 252—256. 1914.
2. **Cremieu, V.:** Nouvelles recherches expérimentales sur la gravitation. C. R. 165, 586—589; 627—675. 1917.
3. **Roth, W.:** Das Gesetz der Proportionalitat von trager und schwerer Masse. D. Naturwissensch. 7, 416. 1919.
4. **Pékar, D.:** Das Gesetz der Proportionalitat von Trägheit und Gravitat. (Bericht uber die experimentelle Prüfung des Gesetzes mit der Eötvös'schen Drehwage.) D. Naturwissensch. 7, 327—331. 1919.
5. **Majorana, Quirino:** Sur la gravitation. C. R. 169, 646—649. 1919.
6. — Expériences sur la gravitation. C. R. 169, 719—721. 1919.
7. — On Gravitation, Theoretical and Experimental Researches. Phil. Mag. (6) 39, 488—540. 1920.
8. — Sulla gravitazione. Lincei Rend (5) 28 [2], 165—174, 221—223, 313—317, 416—421. 1919; (5) 29 [1] 23—32, 90—99, 163—169, 235—240. 1920.
9. **Nagele, Ludwig:** Die Bestimmung der Gravitationskonstante und der Erdmasse im Schulunterricht. Zeitschr. f. phys. Unterricht 33, 81—86. 1920.
10. **Majorana, Q.:** Sur l'absorption de la gravitation. C. R. 173, 478—479. 1921.
11. **Russel, H. N.:** On Majorana's Theory of Gravitation. Astrophys. Journ. 54, 334—336. 1921.
12. **Majorana, Q.:** Sull' assorbimento della gravitazione. Nota V—IX. Lincei Rend. (5) 31 [1] 41—45, 81—86, 141—146, 221—226, 343—346. 1922.
13. **Boggiolera, Enrico:** Sull' azione di una massa sferica omogenea sopra l'unità di massa in un punto della superficie tenendo conto del fenomeno Majorana di assorbimento del flusso gravitazionale. Cim. (6) 23, 215—223. 1922. Nr. 24.
14. **Barus, Carl:** Experiments with the Vacuum Gravitation Needle. Proc. Amer. Nat. Acad. 8, 13—16. 1922. Nr. 1.
15. — Static Deflection, Logarithmic Decrement and First Semiperiod of the Vacuum Gravitation Needle. Proc. Amer. Nat. Acad. 8, 313—316. 1922. Nr. 10.
16. **Wulf, Theodor:** Zum Nachweis der Newtonschen allgemeinen Massenanziehung. Phys. Zeitschr. 23, 154—157. 1922.
17. — Der Nachweis der Newtonschen allgemeinen Massenanziehung. Zeitschr. f. phys. Unterr. 35, 153—161. 1922.

18. **Eddington, A. S.:** Majorana's Theory of Gravitation. Astrophys. Journ. **56**, 21—72. 1922. Nr. 1.
19. **Shaw, P. E. and Davy, N.:** The Effect of Temperature on Gravitative Attraction. Proc. Roy. Soc. London. [A] **102**, 46—47. 1922.
20. **Potter, Harold H.:** Note on the Gravitational Acceleration of Bismuth. Phys. Rev. (2) **19**, 187—188. 1922.
21. **Wilson, H. A.:** Note on the Ratio of Mass to Weight for Bismuth and Aluminium. Phys. Rev. (2) **20**, 75—77. 1922.
22. **Westphal, W.:** Die Moglichkeit einer Prüfung des Satzes von der Gleichheit der schweren und trägen Masse auf astronomischer Grundlage. D. Naturwiss. **10**, 261. 1922.
23. **Shaw, P. E. and Davy, N.:** The Effect of Temperature on Gravitative Attraction. Phys. Rev. (2) **21**, 680—691. 1923.
24. **Shaw, H. and Lancaster-Jones, E.:** The Eötvös Torsion Balance. Proc. Phys. Soc. London. **35**, 151—166. 1923.
25. **Eötvös, Roland v., Pékar, Desiderius und Fekete, Eugen,** Beiträge zum Gesetz der Proportionalität von Trägheit und Gravitität. Ann. d. Phys. (4) **68**, 11—66. 1922.
26. **Nickel, P.:** Herstellung einer Gravitationswage. Zeitschr. f. phys. Unterr. **36**, 42—43. 1923.
27. **Brush, Ch. F.:** Some New Experiments in Gravity. Proc. Amer. Phil. Soc. **64**, 36—50. 1925.

Mit dem Nachweis der allgemeinen Massenanziehung und mit der Bestimmung der Gravitationskonstanten befassen sich die Arbeiten (9), (14), (15), (16) (17). In den Arbeiten (2) wird mit negativem Ergebnis ein Einfluß relativer Bewegungen auf Gravitationswirkungen experimentell gesucht.

Die Konstanz des Verhältnisses zwischen träger und schwerer Masse wird in den Arbeiten (1), (3), (4), (19); (20), (21), (22), (23), (25), (27) untersucht. (3), (4), (25) berichten allgemein über die Eötvös'sche Methode und ihre Ergebnisse; (1), (22) prüfen das Proportionalitätsgesetz auf astronomischem Wege; eine von **Brush** neuerlich in (27) behauptete Abhängigkeit des Verhaltnisses vom chemischen Charakter wird in (20) und (21) als nicht reell erwiesen. Ebenso wird ein Resultat **Shaws**, der eine Abhängigkeit von der Temperatur gefunden zu haben glaubte, in den Arbeiten (19) und (23) berichtigt.

Majorana stellt die Hypothese einer Absorption der Gravitation durch die Materie auf und versucht diese Hypothese experimentell zu verifizieren. Er und seine Schüler diskutieren die theoretischen Folgerungen in (5), (6), (7), (8), (10), (12), (13). **Russell** sucht nachzuweisen, daß Majoranas Hypothese mit der Relativitätstheorie unvereinbar sei (11). Dem widerspricht **Eddington** (18), der andererseits aber zeigt, daß im Falle der Gültigkeit dieser Hypothese ein Perpetuum mobile möglich wäre.

II. Schwerefeld der Erde.

a) Messung der Fallbeschleunigung.

28. **Messerschmitt, Joh. Bapt.:** Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche. Braunschweig 1908.
29. **Koch, K. R.:** Relative Schweremessungen. Stuttgart 1909.
30. **Hecker, O.:** Bestimmung der Größe der Schwerkraft auf offenem Ozean. Zeitschr. d. Ges. f. Erdkunde. 361. 1909.

31. **Boltlinger, C.**: Zur Frage der Absorption der Gravitation. Sitzber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturwiss. Klasse. 223—239. 1914.

32. **Shedd, John C. and Birchby, W. N.**: A Study of the Reversible Pendulum. Part II. Experimental Verifications. Phys. Rev. 34, 110—124. 1912.

33. **Pfaff, W.**: Über Messungen der Schwerkraft. Beitr. z. Geophys. 13, 182 bis 204. 1914. Bespr.: Beibl. Ann. Phys. Chem. 38, 1231. 1914.

34. **Schweydar, W.**: Beobachtungen der Änderungen der Intensität der Schwerkraft durch den Mond. Sitzber. d. Akad. d. Wiss. Berlin. 454—465. 1914.

35. — Harmonische Analyse der Lotstörungen durch Sonne und Mond. Veröff. des kgl. Preuß. Geod. Inst. N. F. Nr. 59, Potsdam (Leipzig, Teubner). 1914.

36. **Hammer, E.**: Kohlschütter über die ostafrikanische Pendelexpedition. Petermanns Mitteilungen. 60, 222—223. 1914.

37. **Lechner, Alfred**: Das Fingersche Pendel. Zeitschr. f. Instr.-Kunde. 35, 269—273, 1915.

38. **Helmert, F. R.**: Neue Formeln für den Verlauf der Schwerkraft im Meeresniveau beim Festlande. Sitzber. d. Akad. d. Wiss. Berlin. 676—685. 1915.

39. **Briegs, S. J.**: A New Method of Measuring the Acceleration of Gravity on Sea. Proc. Amer. Nat. Acad. 2, 399—407. 1916.

40. **Guillet**: Mésure de l'intensité du champ de pésanteur: Pendule de Galilée et tube de Newton. C. R. 165, 1050—1052. 1917.

41. **Špaček, Vaclav**: Pohyb kyvadla se zřetelem ke křivosti země a změnám urychlení. Mem. Soc. de Bohème. 1—17. 1920.

42. **Pékar, D.**: Die geophysikalischen Messungen des Barons Roland von Eotvös. D. Naturwiss. 7. 149—159. 1919.

43. **Tams, E.**: Drehwage und Schweremessungen in ihrer Bedeutung für die Geologie. Geologische Rundschau 10, 1—13. 1919.

44. **Barus, Carl**: Note on a Pneumatic Method of Measuring Variations of the Acceleration of Gravity. Proc. Amer. Nat. Acad. 6, 495—498. 1920.

45. — Note on Torsional Measurements of Variations of the Acceleration of Gravity by Interference Methods. Proc. Amer. Nat. Acad. 6, 498—502. 1920.

46. **Szolnoki, Imre**: Die Anwendung des Eötvös-Effektes im bewegenden Sonnensystem. Ann. d. Phys. (4) 67, 73—76. 1921.

47. **Lichtenecker, K.**: Zur Lehre vom physischen Pendel. Zeitschr. f. phys. Unterr. 35, 110—113. 1922.

48. **Pékar, D.**: Die bei Feldmessungen angewendete Drehwage von Baron Roland von Eötvös. Zeitschr. f. Instrum.-Kunde. 42, 173—178. 1922.

49. **Schweydar, W.**: Die photographische Registrierung bei Feldmessungen mit der Eötvös'schen Drehwage. Zeitschr. f. Instrum.-Kunde. 42, 179—182. 1922.

50. **Banerij, Durgadas**: On the Chronographic Determination of Acceleration of Gravity. Proc. Ind. Ass. for the Cult. of Sc. 8, 51—56. 1923. Nr. 1.

51. **Pékar, D.**: Die Anwendbarkeit der Eötvös'schen Drehwage im Felde. Zeitschr. f. Instrum.-Kunde. 43, 187—195. 1923.

52. **Wagner, F.**: Prospecting with the Eötvös Balance. Eng. and Min. Journ. 116, 583—589. 1923.

53. **Heiland, C.**: Die Brauchbarkeit der Drehwagen im Felde. Zeitschr. f. Instrum.-Kunde. 45, 89—95. 1925.

Mit den Methoden und Mitteln zur Absolutbestimmung der Fallbeschleunigung beschäftigen sich die Arbeiten (32), (37), (40), (47), (50). In den Arbeiten (40) und (50) werden hierzu direkte Messungen von Fallzeiten benutzt. (32) und (47) befassen sich theoretisch mit speziellen Problemen des Reversionspendels, während in der Arbeit (37) ein Reversionspendel mit einer Schneide und zwei verschiebbaren Massen diskutiert wird. Die Arbeit (41) entwickelt die Theorie des gewöhnlichen Pendels unter Berücksichtigung der Schwereänderungen, der Form und Bewegung des Geoids. Mit dem von Störungen befreiten Verlauf der Schwerkraft auf dem Geoid beschäftigt sich (38).

Die Arbeiten (33), (44), (45) geben neue Methoden zur relativen Schweremessung an; bei der in Arbeit (45) beschriebenen Methode wird die Torsionselastizität eines Stahldrahtes verwendet, bei (44) und (33) die Spannkraft der Gase, und zwar bei (33) unter Benutzung eines Cartesianischen Tauchers. — Eine größere Anzahl von Arbeiten beschäftigt sich mit der Anwendung der Eötvös'schen Drehwage auf geophysikalische Messungen und mit den technischen Einzelheiten dieser Methode, insbesondere mit der photographischen Registrierung: (42), (43), (48), (49), (51), (52), (53). Im Referat (36) wird ein Beispiel für die praktische Anwendung der Lotstörungsmessungen besprochen.

Die periodischen Schwankungen der Schwere werden in den Arbeiten (31), (34), (35) und (46) erörtert. In (31) wird die früher vom Verfasser ausgesprochene Vermutung, daß aus den Schwankungen der Schwere auf eine Absorption der Gravitation im Erdinnern geschlossen werden könne, als unzutreffend nachgewiesen. In (34) wird die praktische Anwendung der in (35) entwickelten Theorie der Lotschwankungen gezeigt. Die Arbeit (46) weist darauf hin, daß es Lotschwankungen geben müsse, die einem im nächsten Abschnitt erwähnten Effekt (s. Arbeit 59) zuzuschreiben sind; zu ihrem Nachweis müßten besondere Beobachtungen angestellt werden.

b) Mechanische Folgen der Erdrotation.

54. **Denizot, Alfred**: Das Foucaultsche Pendel und die Theorie der relativen Bewegung. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner. 1913.
55. **Esclangon, Ernest**: Sur l'entraînement du Support dans les observations du pendule. C. R. 156, 1005—1008. 1913.
56. **Denizot, A.**: Zur Theorie der relativen Bewegung nebst Anwendung auf Foucaults Gyroscop. Wien. Anz. 106. 1911. Wien. Ber. 123 [2a], 903—924. 1914.
57. **Bromwich, T. J. A.**: On the Theory of Foucault's Pendulum and of the Gyrostatic Pendulum. Proc. London Math. Soc. (2) 13, 232—235. 1914.
58. **Korda, Desiré**: Relation entre les expériences d'Eötvös et de Foucault concernant la rotation de la terre. C. R. Soc. Suisse de phys. Lugano 9. sept. 1918. Arch. scientifique phys. et nat. (4) 46, 336—340. 1918.
59. **Eötvös, R. v.**: Experimenteller Nachweis der Schwereänderung, die ein auf normal geformter Erdoberfläche in östlicher oder westlicher Richtung bewegter Körper durch diese Bewegung erleidet. Ann. d. Phys. (4) 59, 743 bis 752. 1919.
60. **Longden, A. C.**: On the Irregularities of Motion of the Foucault Pendulum. Phys. Rev. (2) 13, 241—258. 1919.
61. **Denizot, A.**: Über Foucaults Pendel und Gyroscop. Jahresber. D. Math. Ver. 25, 445—455.

62. Baker, William C.: Displacement from the Apparent Vertical in Free Fall. Phys. Rev. (2) 14, 352—366. 1919.
63. Lambert, Walter D.: Some Mechanical Curiosities Connected with the Earth Field of Force. Sill. Journ. (5) 2, 129—158. 1921. Nr. 9.
64. Keutel, F.: Der Foucaultsche Pendelversuch im Unterricht. Zeitschr. f. phys. Unterr. 34, 158—161. 1921.
65. Altenburger, Camillo: Rollbewegung einer Kugel auf einer schiefen Ebene mit Rücksicht auf die Erdrotation. Wien. Anz. 225—226. 1921.
66. Hagen, I. G.: Die Fallmaschine als Beweismittel für die Erdumdrehung. Zeitschr. f. Instrum.-Kunde 43, 169—175. 1923.

In (54) gibt Denizot gleichzeitig mit einer Polemik gegen die übliche Auffassung eine ausführliche Theorie des Foucaultschen Pendels sowie der östlichen und südlichen Fallabweichungen. Die vom Verfasser entwickelte Theorie der Relativbewegung materieller Punkte wird auf Massensysteme erweitert und außer auf das Foucaultsche Pendel auch auf das Foucaultsche Gyroscop angewendet: (56), (61). Eine andere Darstellung dieser Verhältnisse gibt die Arbeit (60), die in zweiter Näherung eine bereits von mehreren Experimentatoren empirisch gefundene Formel für die Unregelmäßigkeiten des Foucaultschen Pendels liefert. Mit der experimentellen Ausführung des Foucaultschen Versuches, besonders mit Verkleinerung der erforderlichen Pendeldimensionen, beschäftigen sich die Arbeiten (55), (60), (64).

Den Nachweis der durch die Erdrotation verursachten Abweichung bei der Fallbewegung behandeln die Arbeiten (62), (65), (66), und zwar (62) für den freien Fall, (66) für den mittels Fallmaschine verlangsamten Fall, und (65) für die Bewegung auf einer schiefen Ebene.

III. Kreiselphänomene.

67. Pfeiffer, F.: Experimente mit dem Prandtlschen Kreiselapparat. Nach den Angaben von Prof. Prandtl zusammengestellt. Zeitschr. für Math. u. Phys. 60, 337—354. 1912.
68. Marcolongo, R.: Le curve del vertice di un giroscopio poligonale di Gruey. Rend. di Napoli (3) 18, 162—165. 1912.
69. Franklin, W. S.: An Important Practical Problem in Gyrostatic Action. Phys. Rev. 34, 48—52. 1912.
70. Newkirk, Burt L.: Nutation in Practical Applications of Gyroaction. Phys. Rev. 35, 27—30. 1912.
71. Milnor, J. W.: A General Problem in Gyrostatic Action. Phys. Rev. 35, 477—483. 1912.
72. Föppl, L.: Rotierendes Ei auf horizontaler Unterlage. Habilitationsschr. Würzburg. Göttingen 1914.
73. Gray, Andrew: Gyrostats and Gyrostatic Action. Smithsonian Report for 1914, 193—208. 1915.
74. Usener, H.: Der Kreisel als Richtungsweiser. München 1917.
75. Lechner, Alfred: Über die Richtkraft eines rotierenden geführten Kreisels. Wien. Anz. 99. 1915. Wien. Ber. 124 [2a] 279—286. 1915.
76. — Zur Theorie der Laval-Achse. Wien. Ber. 126 [2a], 1355—1363. 1917.
77. Tournay-Hinde, E. E.: On a New Gyroscopic Phenomenon. Proc. Roy. Soc. London (A) 94, 218—222. 1918.

78. Grammel, R.: Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen. Braunschweig 1920.
79. Martienssen, O.: Ein neuer Kreiselkompaß. Zeitschr. f. Instrum.-Kunde. 39, 165—180. 1919.
80. Lorenz, H.: Kurze Ableitung der Bewegungsgleichungen des Kreisels. Phys. Zeitschr. 20, 294—296. 1919. Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen. 16, 233 bis 235. 1919.
81. — Technische Anwendungen der Kreiselbewegungen. Zeitschr. d. Ver. D. Ing. 63, 1224—1231, 1250—1257. 1919. 64, 68—69. 1920.
82. Schuler, M.: Der Kreiselkompaß unter dem Einfluß der Schiffschwingungen. Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. 2, 233—250. 1922. Nr. 4.
83. — Der Kreisel als Richtungsweiser. Zeitschr. f. Geophys. 1, 59—65. 1924. Nr. 1/2.

Eine sehr vollständige und einfache Darstellung des Gebietes gibt das Buch von Grammel (78). In den Arbeiten (80) wird die Theorie kurz zusammengefaßt und insbesondere auch die Theorie der Selbsteinstellung rotierender Wellen entwickelt, die im besonderen in der Arbeit (76) behandelt wird. — Anordnungen zur experimentellen Untersuchung und zur Demonstration der Kreiselphanomene werden in den Arbeiten (67), (68), (71), (73) und (77) beschrieben. Umfassender sind die in (67) und (73) angegebenen Versuche, während die ubrigen sich mit besonderen Erscheinungen befassen.

Ein Problem, das bei der Verwendung des Kreisels zur Steuerung von Torpedos auftritt, wird in der Arbeit (69) behandelt und in (70) und (71) schrittweise verallgemeinert. Mit dem Kreiselkompaß befassen sich die Arbeiten (74) zusammenfassend, ferner (75), (79), (82), (83). (75) gibt eine einfache Ableitung der Richtkraft eines Kreisels; die folgenden drei Arbeiten erörtern den Schlingerfehler und seine Beseitigung durch den Dreikreiselkompaß.

IV. Reibung fester Körper.

84. Fleiß, Cristof: Untersuchung uber die Reibung beim Schreiben in Ruß. Phys. Zeitschr. 12, 391—398. 1911.
85. Field, Peter: On the Motion of a Disc with Three Supports on a Rough Plane. Phys. Rev. 35, 177—184. 1912.
86. Lechner, Alfred: Theorie der Rollreibung. Wien. Anz. 448. 1913. Wien. Ber. 122 [2a], 2069—2098. 1913.
87. Wellstein, Julius: Zur Theorie der Reibung starrer Körper. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 61, 337—367. 1913.
88. Pfeiffer, F.: Über ebene Gleit- und Rollbewegung starrer Körper. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 62, 113—148. 1913.
89. Lechner, A.: Experimentelle Ermittlung der Rollreibungsziffer. Zeitschr. f. Instrum.-Kunde. 38, 145—150. 1918.
90. Andrade, Jules: La pesée d'un frottement pendant le glissement relatif des deux solides en contact. C. R. 169, 638—639. 1919.
91. — Mésure photographique de la résistance au roulement. C. R. 170, 225 bis 226. 1920.
92. — Les frottements et l'isochronisme. C. R. 171, 664. 1920.
93. — Sur les déterminations optiques des résistances de roulement d'un plan rouleur. C. R. 172, 798—799. 1921.

94. **Andrade, Jules:** Les résistances de roulement et la méthode optique du miroir. C. R. 172, 1466—1467. 1921.
95. **Delassus, Et.:** Sur une conséquence des lois du frottemnnt. C. R. 127, 1335—1337. 1921.
96. **Fuchs, Sigmund:** Zur Theorie des Gleit- und Rollwiderstandes fester Körper. I. Gleitende Reibung; II. Rollende Reibung. Phys. Zeitschr. 22, 213 bis 218. 1921.
97. **Sachs, G.:** Versuche über Reibung fester Körper. Zeitschr. f. angewandte Math. u. Mech. 4, 1—32. 1914.
98. — Einige Gesichtspunkte für die Konstruktion von Reibungstrieben. Versuche zur Reibung fester Körper. Maschinenbau 3, 168—175. 1924. Nr. 7.
99. **Wavre, R.:** Sur le mouvement de deux sphères concentriques à propos d'une hypothèse géologique. Arch. sc. phys. et nat. (5) 7, 133—145. 1925.

Von der Theorie der Reibung fester Korper und meist auch von ihrem Vergleich mit den Versuchsergebnissen handeln die Arbeiten (85), (86), (87), (58), (95), (96). In (96) wird von einem besonderen Gesichtspunkt aus die Theorie der gleitenden und der rollenden Reibung allgemein besprochen. Die Arbeit (86) gibt eine Theorie der rollenden Reibung auf elastizitätstheoretischer Grundlage. In (85) und (88) werden besondere Falle unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Coulombschen Reibungsgesetzes behandelt, und zwar in (85) das im Titel der Arbeit angegebene Problem, in (88) die Bewegung einer Kreisscheibe auf einer komplanaren starren Kurve. In der Arbeit (87) wird eine von **Mises** vorgeschlagene Abanderung des Coulombschen Gesetzes als allgemein brauchbar nachgewiesen. In (95) wird gezeigt, daß dieses Gesetz in einem besonderen Fall zu einem inneren Mangel der Theorie (Zweideutigkeit) fuhrt.

Mit der experimentellen Untersuchung der Reibung befassen sich die Arbeiten (89), (90), (91), (92), (93), (94), (97). (89) ist eine Ergänzung zu **Lechners** theoretischen Arbeiten. Zur Messung der rollenden Reibung werden in (90) und (91) zwei neue Methoden angegeben, die in (92), (93), (94) verbessert werden. Eine wichtige technische Anwendung erörtert die Arbeit (98). In (84) wird die Reibung beim Schreiben auf den gebräuchlichen Registertrommeln untersucht. (99) enthält eine Anwendung der Reibungstheorie auf die **Wegener**schen geologischen Hypothesen.

Namenverzeichnis.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

Sachverzeichnis.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

Druck von Breitkopf & Härtel, Leipzig.